



This is a digital copy of a book that was preserved for generations on library shelves before it was carefully scanned by Google as part of a project to make the world's books discoverable online.

It has survived long enough for the copyright to expire and the book to enter the public domain. A public domain book is one that was never subject to copyright or whose legal copyright term has expired. Whether a book is in the public domain may vary country to country. Public domain books are our gateways to the past, representing a wealth of history, culture and knowledge that's often difficult to discover.

Marks, notations and other marginalia present in the original volume will appear in this file - a reminder of this book's long journey from the publisher to a library and finally to you.

Usage guidelines

Google is proud to partner with libraries to digitize public domain materials and make them widely accessible. Public domain books belong to the public and we are merely their custodians. Nevertheless, this work is expensive, so in order to keep providing this resource, we have taken steps to prevent abuse by commercial parties, including placing technical restrictions on automated querying.

We also ask that you:

- + *Make non-commercial use of the files* We designed Google Book Search for use by individuals, and we request that you use these files for personal, non-commercial purposes.
- + *Refrain from automated querying* Do not send automated queries of any sort to Google's system: If you are conducting research on machine translation, optical character recognition or other areas where access to a large amount of text is helpful, please contact us. We encourage the use of public domain materials for these purposes and may be able to help.
- + *Maintain attribution* The Google "watermark" you see on each file is essential for informing people about this project and helping them find additional materials through Google Book Search. Please do not remove it.
- + *Keep it legal* Whatever your use, remember that you are responsible for ensuring that what you are doing is legal. Do not assume that just because we believe a book is in the public domain for users in the United States, that the work is also in the public domain for users in other countries. Whether a book is still in copyright varies from country to country, and we can't offer guidance on whether any specific use of any specific book is allowed. Please do not assume that a book's appearance in Google Book Search means it can be used in any manner anywhere in the world. Copyright infringement liability can be quite severe.

About Google Book Search

Google's mission is to organize the world's information and to make it universally accessible and useful. Google Book Search helps readers discover the world's books while helping authors and publishers reach new audiences. You can search through the full text of this book on the web at <http://books.google.com/>



Über dieses Buch

Dies ist ein digitales Exemplar eines Buches, das seit Generationen in den Regalen der Bibliotheken aufbewahrt wurde, bevor es von Google im Rahmen eines Projekts, mit dem die Bücher dieser Welt online verfügbar gemacht werden sollen, sorgfältig gescannt wurde.

Das Buch hat das Urheberrecht überdauert und kann nun öffentlich zugänglich gemacht werden. Ein öffentlich zugängliches Buch ist ein Buch, das niemals Urheberrechten unterlag oder bei dem die Schutzfrist des Urheberrechts abgelaufen ist. Ob ein Buch öffentlich zugänglich ist, kann von Land zu Land unterschiedlich sein. Öffentlich zugängliche Bücher sind unser Tor zur Vergangenheit und stellen ein geschichtliches, kulturelles und wissenschaftliches Vermögen dar, das häufig nur schwierig zu entdecken ist.

Gebrauchsspuren, Anmerkungen und andere Randbemerkungen, die im Originalband enthalten sind, finden sich auch in dieser Datei – eine Erinnerung an die lange Reise, die das Buch vom Verleger zu einer Bibliothek und weiter zu Ihnen hinter sich gebracht hat.

Nutzungsrichtlinien

Google ist stolz, mit Bibliotheken in partnerschaftlicher Zusammenarbeit öffentlich zugängliches Material zu digitalisieren und einer breiten Masse zugänglich zu machen. Öffentlich zugängliche Bücher gehören der Öffentlichkeit, und wir sind nur ihre Hüter. Nichtsdestotrotz ist diese Arbeit kostspielig. Um diese Ressource weiterhin zur Verfügung stellen zu können, haben wir Schritte unternommen, um den Missbrauch durch kommerzielle Parteien zu verhindern. Dazu gehören technische Einschränkungen für automatisierte Abfragen.

Wir bitten Sie um Einhaltung folgender Richtlinien:

- + *Nutzung der Dateien zu nichtkommerziellen Zwecken* Wir haben Google Buchsuche für Endanwender konzipiert und möchten, dass Sie diese Dateien nur für persönliche, nichtkommerzielle Zwecke verwenden.
- + *Keine automatisierten Abfragen* Senden Sie keine automatisierten Abfragen irgendwelcher Art an das Google-System. Wenn Sie Recherchen über maschinelle Übersetzung, optische Zeichenerkennung oder andere Bereiche durchführen, in denen der Zugang zu Text in großen Mengen nützlich ist, wenden Sie sich bitte an uns. Wir fördern die Nutzung des öffentlich zugänglichen Materials für diese Zwecke und können Ihnen unter Umständen helfen.
- + *Beibehaltung von Google-Markenelementen* Das "Wasserzeichen" von Google, das Sie in jeder Datei finden, ist wichtig zur Information über dieses Projekt und hilft den Anwendern weiteres Material über Google Buchsuche zu finden. Bitte entfernen Sie das Wasserzeichen nicht.
- + *Bewegen Sie sich innerhalb der Legalität* Unabhängig von Ihrem Verwendungszweck müssen Sie sich Ihrer Verantwortung bewusst sein, sicherzustellen, dass Ihre Nutzung legal ist. Gehen Sie nicht davon aus, dass ein Buch, das nach unserem Dafürhalten für Nutzer in den USA öffentlich zugänglich ist, auch für Nutzer in anderen Ländern öffentlich zugänglich ist. Ob ein Buch noch dem Urheberrecht unterliegt, ist von Land zu Land verschieden. Wir können keine Beratung leisten, ob eine bestimmte Nutzung eines bestimmten Buches gesetzlich zulässig ist. Gehen Sie nicht davon aus, dass das Erscheinen eines Buchs in Google Buchsuche bedeutet, dass es in jeder Form und überall auf der Welt verwendet werden kann. Eine Urheberrechtsverletzung kann schwerwiegende Folgen haben.

Über Google Buchsuche

Das Ziel von Google besteht darin, die weltweiten Informationen zu organisieren und allgemein nutzbar und zugänglich zu machen. Google Buchsuche hilft Lesern dabei, die Bücher dieser Welt zu entdecken, und unterstützt Autoren und Verleger dabei, neue Zielgruppen zu erreichen. Den gesamten Buchtext können Sie im Internet unter <http://books.google.com> durchsuchen.

3-OE

GROSSMANN

INHALT.

Theorie und Lösung der irreductibelen transcendenten Gleichungen.

Praktische Anwendung der Theorie und Lösung der irreductibelen transcendenten Gleichungen auf die Zinseszins- und Rentenrechnung.

Mathematische Behelfe zur Berechnung eines Tarifes für die Versicherung von Abgelehnten.

Theorie und Lösung der irreductibelen transcendenten Gleichungen und ihre Anwendung zur Berechnung von Prämientarifen einiger Assecuranz-Combinationen.

Diese Gleichung kann für den Werth $x=1$ in eine algebraische über-
gehen, es wird also hierdurch ausgedrückt, dass es bei dieser Gleichung erstens
Wurzeln, welche < 1 , und zweitens solche, die > 1 sind, geben wird.

Setzen wir ferner y als eine positive Zahl voraus, deren Werth grösser als
1 ist, so werden hier folgende Fälle statthaben:

$$\begin{aligned} (a) \quad & \dots \dots x > y \\ (b) \quad & \dots \dots x > e^{-y} \end{aligned}$$

Für den zweiten Fall können wir die Gleichung (a) in der Form
 $y = x + l \frac{1}{x}$ schreiben, wodurch es uns klar wird, dass, wenn die Gleichung be-
stehen soll, das $\frac{1}{x}$ klein werden muss, dass $l \frac{1}{x}$ eine positive Zahl wird, welche
den Werth des x bis zum vollständigen Werthe des y ergänzt; das heisst für
 $x < 1$ erhalten wir den Logarithmus eines unechten Bruches, welcher bekanntlich
positiv ist und somit mit dem Werthe des x den des y ergeben muss.

Es werden sich diesen Auseinandersetzungen zufolge für die gegebene
Gleichung (a) zweierlei Wurzeln ergeben, deren Beschaffenheit durch die Un-
gleichungen

$$\begin{aligned} (a) \quad & \dots \dots x > y \\ (b) \quad & \dots \dots 1 > x > e^{-y} \end{aligned}$$

ausgedrückt ist.

Ganz anders verhält es sich aber bei der Gleichung

$$y = x + lx \dots \dots (b)$$

hier wird nur eine unbeschränkte Wurzel, und zwar für die Bedingungs-
ungleichung $x < y$ bestehen, wogegen die Ungleichung $x < e^y$ nur für Werthe
des y , welche kleiner als 0 sind, bestehen wird und in Betreff der grösseren
Werthe desselben imaginär ist. Die Wurzel wird sonach den Näherungswerth

$$\begin{aligned} (c) \quad & \dots \dots x < y \quad \text{für den ersten Fall, und} \\ \text{für den zweiten Fall} \quad & (d) \quad \dots \dots 0 < x < e^y \quad (y < 0) \text{ ergeben.} \end{aligned}$$

Die Substitutionsgleichungen von (a) und (b) werden daher folgender-
massen lauten:

$$\begin{aligned} a) \quad & \dots \dots \dots \left\{ \begin{aligned} x_1 &= E \left[y + l m \right] \\ &\quad m > y \\ x_2 &= E \left[y - l m \right] \\ &\quad 1 > m > e^{-y} \end{aligned} \right. \\ b) \quad & \dots \dots \dots \left\{ \begin{aligned} x_1 &= E \left[y - l m \right] & \text{für positive } y \\ &\quad m < y \\ x_2 &= E \left[y - l m \right] & \text{für negative } y \\ &\quad 0 < m < e^y \end{aligned} \right. \end{aligned}$$

Es sei die Gleichung

$$y = f(x) \pm l\varphi(x) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (1)$$

lösen, somit entspringt hieraus die Resultatsgleichung:

$$x = \underset{x \equiv q}{\overset{m \equiv F}{E}} \left[F[y \mp l\varphi(m)] \right] \quad . \quad . \quad (2)$$

in hierin F die reciproke Function von f bedeutet.

Für $f(x) = \varphi(x) = x$ erhalten wir mit Bezug auf die beiden Zeichen \pm Gleichungen

$$\begin{aligned} . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad y &= x + lx \\ . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad y_1 &= x - lx \end{aligned}$$

deren nähere Beschaffenheit wir bereits erörtert haben. Aus diesen erhalten wir auch die beiden Exponentialgleichungen

$$\begin{aligned} z &= e^y = x e^x \\ z_1 &= e^{y_1} = \frac{e^x}{x} \end{aligned}$$

oder aber allgemein

$$w = a^y = a^x \cdot x^{la}, \quad w_1 = a^{y_1} = a^x \cdot x^{-la}$$

Ferner die Gleichungen

$$\begin{aligned} . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad y &= x + x lx \\ . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad y_1 &= x - x lx \end{aligned}$$

wenn wir für $f(x) = x$ und $\varphi(x) = x^x$ einsetzen. Diese lassen sich auf die Gleichungen (α) und (β) zurückführen, welche Manipulation auch unbedingt notwendig ist, da x^x an und für sich schon eine irreducible transcendente Function ist.

Es wird demnach die Gleichung (γ) folgendermassen zu behandeln sein: Nehmen wir in dieser Gleichung $lex = u$ ein, so ergibt sich $x = e^{u-1}$, und dieses eingesetzt gibt

$$y = e^{u-1} + e^{u-1} \cdot (u-1) = e^{u-1} \cdot u$$

daraus

$$ly = u - 1 + lu$$

und

$$ly + 1 = u + lu$$

was ergibt; wenn wir nun $(1 + ly) = v$ setzen, so erhalten wir die der Gleichung (α) entsprechende Form

$$v = u + lu$$

Eine ähnliche Procedur, nemlich, wenn wir in die Gleichung (δ) den Werth $y = u_1$ einführen, führt uns zu dem Resultate

$$y_1 = e^{1-u_1} \cdot u_1$$

daraus

$$ly_1 = 1 - u_1 + lu_1$$

und endlich

$$1 - ly_1 = u_1 - lu_1$$

was ergeben muss.

Demnach abermals für $1 - ly_1 = v_1$ eingesetzt, liefert uns die der Gleichung entsprechende Schlussgleichung

$$v_1 = u_1 - lu_1$$

Den beiden Gleichungen (γ) und (δ) werden nun folgende Exponenten gleichungen entsprechen.

Aus der Gleichung (γ) entspringt

$$(\epsilon) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad e^y = e^x x^x = (xe)^x$$

und daraus, wenn $x \cdot e = z$ gesetzt wird, $x = \frac{z}{e}$, und demnach

$$(\lambda) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad e^y = z^{\frac{z}{e}} \text{ oder } e^y = z^x$$

mit diesem analog wird auch $e^{y_1} = e^x x^{-x} = \left(\frac{e}{x}\right)^x$ und hierin $\frac{e}{x} = z_1$ ergibt

$$(\mu) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad e^{y_1} = z_1^{\frac{e}{z_1}} \text{ oder } e^{\frac{y_1}{e}} = z_1^{\frac{1}{z_1}}$$

demnach sind auch diese Gleichungen nach (α) und (β) löslich.

Setzen wir ferner als nächstes Beispiel in die Gleichung (1) $f(x) = \frac{1}{1-x}$ und $\varphi(x) = x$, entstehen die Gleichungen

$$(\kappa) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad y = \frac{1+x}{1-x} + lx$$

$$(\omega) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad y_1 = \frac{1+x}{1-x} - lx$$

Diesen entsprechen die beiden Ersatzgleichungen

$$(\rho) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad x = \frac{m=k}{m=q} E \left[\frac{y-1-lm}{y+1-lm} \right]$$

$$(\sigma) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad x = \frac{m=k}{m=q} E \left[\frac{y_1-1+lm}{y_1+1+lm} \right]$$

Wollen wir nun die Gleichung (κ) numerisch lösen, werden wir vor Al die Wurzeln untersuchen müssen.

Es ergibt sich demnach als endliches Minimum im ersten Factor

$$\frac{1+x}{1-x} = 1 \text{ für } x = 0$$

Für diesen Werth würde aber der zweite Factor negativ unendlich werden wird daher x unbedingt grösser als 0 sein müssen, und zwar sich zwischen 0 und 1 so bewegen, dass y positiv bleibt.

Dr. Ludwig Grossmann's

Theorie und Lösung der irreductibelen transcendenten Gleichungen.

III.

Bei der genannten Gleichung ist vor Allem jene merkwürdige Eigenschaft zu beobachten, dass die Annäherung des Näherungswerthes eine continuirliche ist, welches wir nur dem speciellen Falle, dass bei dieser Gleichung für einen rationalen Werth des x der Werth des $y=0$ wird, zuzuschreiben haben.

Was die aus jenen zwei Gleichungen (η) und (π) hervorgehenden Exponentialgleichungen betrifft, so werden sich dieselben folgendermassen gestalten:

Aus der Gleichung (η) ergibt sich

$$u = e^y = e^{\sqrt{x^2-1}} \cdot x \text{ oder } a^y = a^{\sqrt{x^2-1}} \cdot x^{la}$$

und mit diesem analog aus π

$$u_1 = e^{y_1} = e^{\sqrt{x^2-1}} \cdot x^{-1} \text{ oder } a^{y_1} = a^{\sqrt{x^2-1}} \cdot x^{-la}$$

a) Wenn wir nun hierin anstatt x den Werth $(z+1)$ einsetzen, ergibt sich

$$u = e^y = e^{\sqrt{z(z+2)}} \cdot (z+1)$$

oder.

$$a^y = a^{\sqrt{z(z+2)}} \cdot (z+1)^{la}$$

und analog

$$u_1 = e^{y_1} = e^{\sqrt{z(z+2)}} \cdot (z+1)^{-1}$$

oder

$$a^{y_1} = a^{\sqrt{z(z+2)}} \cdot (z+1)^{-la}$$

b) Für $x^2 = (z^2 + 1)$ ergeben sich die beiden Gleichungen

$$u = e^z \cdot \sqrt{z^2 + 1} \text{ und } u_1 = \frac{e^z}{\sqrt{z^2 + 1}}$$

und in die beiden $z = tg v$ eingesetzt ergibt

$$u_1 = e^{tg v} \cdot \cos v, \quad u = e^{tg v} \cdot \sec v$$

und so lassen sich unendlich viele solcher Gleichungen entwickeln und alle nach (ζ) und (ξ) lösen.

Als letztes Beispiel für diese speciellen Gleichungen führen wir noch Folgendes an:

Es sei in der Gleichung (1) $f(x) = \sqrt{x^2 - p^2}$ und $\varphi(x) = \sqrt{\frac{x+p}{x-p}}$ demgemäss ergibt sich

$$(\mu) \quad \dots \quad y = \sqrt{x^2 - p^2} + \frac{1}{2} l \frac{x+p}{x-p}$$

$$(\Omega) \quad \dots \quad y_1 = \sqrt{x^2 - p^2} - \frac{1}{2} l \frac{x+p}{x-p}$$

und die hieraus sich ergebenden Ersatzgleichungen

Daraus ergibt sich analog zu dem vorigen

$$1 < z < \frac{p}{y} \pm \sqrt{\frac{p^2}{y^2} + 1}$$

als Näherungswerth der zwei nächsten Wurzeln.

Wollen wir für die beiden ersteren Wurzeln die Näherungswerthe finden, so betrachten wir die Gleichung (Ω_1) in jenem Stadium, wo $z=0$ ist. Es ist leicht ersichtlich, dass in diesem Falle $y=\infty$ werden muss; als bekannte Bedingung der beiden ersteren Wurzeln gilt aber auch $z < 1$. Soll nun $y < \infty$ werden, so wird $z > 0$ werden, und somit sich zwischen 0 und 1 bewegen müssen, d. h. $0 < z < 1$.

Wir wollen nun auch eruiren, welchen Bedingungen z entsprechen muss, um erstens positive, zweitens negative Werthe des y zu ergeben.

Bekanntlich ist der kleinste positive Werth die Grösse 0, es wird demnach dieser Werth den Uebergang der positiven y in negative bilden.

Es sei denn

$$0 = y = \frac{2pz}{z^2 - 1} - lz$$

folglich

$$\frac{2pz}{z^2 - 1} = lz$$

woraus sich ergibt

$$2p = l \left(\frac{z^2 - 1}{z} \right) \text{ und } z^{\frac{z^2 - 1}{z}} = e^{2p}$$

Wenn wir nun hierin für $\frac{z^2 - 1}{z}$ die Grösse u einsetzen, erhalten wir:

$$z = \frac{u}{2} \pm \sqrt{\frac{u^2}{4} + 1}$$

und daraus durch Substitution

$$e^{2p} = \left[\frac{u}{2} \pm \sqrt{\frac{u^2}{4} + 1} \right]^u$$

oder

$$u l \left[\frac{u}{2} \pm \sqrt{\frac{u^2}{4} + 1} \right] = 2p$$

Die Ersatzgleichung erhält daher folgende Form:

$$u = \frac{2p}{l \left[\frac{m}{2} \pm \sqrt{\frac{m^2}{4} + 1} \right]}$$

aus welcher der gesuchte Werth berechnet, uns dann durch Substitution den Werth z ergibt. Wir wollen uns jedoch blos mit dem Ergebnisse begnügen, dass z in diesem Falle immer grösser als 1 sein muss. Nennen wir diesen Anulationswerth M , so ergibt sich, da für $z=0$ der Werth des y ein unendlicher ist, z sich zwischen 0 und M bewegen wird, d. h. $0 < z < M$ sein. Da nun aber y für den Werth $z=1$ den Werth $y=\infty$ und für $z=\infty$ denjenigen,

Dr. Ludwig Grossmann's

Theorie und Lösung der irreductibelen transcendenten Gleichungen.

IV.

Die vorerwähnte Eventualität haben wir aus jenem Grunde in Erinnerung gebracht, weil bei den aus der Gleichung (1) hervorgehenden Gleichungen es der Fall ist, dass eine discontinuirliche Ersatzgleichung sich ergibt, weshalb wir hierauf aufmerksam machen und zu diesem Behufe auch ein ähnliches Beispiel durchführen wollen.

Es wäre die Gleichung

$$b) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad y = x^x - l \frac{x^2 + 1}{x}$$

zur Lösung zu unterziehen; es werden sich auch demzufolge die Ersatzgleichungen

$$b_1) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad x = \underset{m=q}{\overset{m=k}{E}} \left[\frac{e^{(m^m - y)}}{2} \pm \sqrt{\frac{e^{2(m^m - y)}}{4} - 1} \right]$$

$$b_2) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad x = \underset{m=q}{\overset{m=k}{E}} \left[\left(y + l \frac{m^2 + 1}{m} \right)^m \right]$$

$$b_3) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad x = \underset{m=q}{\overset{m=k}{E}} \left[\frac{l \left(y + l \frac{m^2 + 1}{m} \right)}{lm} \right]$$

ergeben, von denen jedoch nur die Gleichungen (b_2) und (b_3) continuirlich sind, wobei (b_2) für Werthe des x , welche kleiner oder gleich 1 sind, und (b_3) für welche, welche grösser als 1 sind, zu verwenden ist.

Zu den Wurzeln dieser Gleichung gelangen wir wie folgt:

Das Minimum des zweiten Gliedes ergibt sich für $x = 1$, demnach $\frac{x^2 + 1}{x} = l2$; hiefür wird $x^x = y + l2$ und für $x > 1$ wird $x^x > y + l2$ oder $> \frac{l(y + l2)}{lx}$. Aber auch für $x < 1$ müsste hier x^x grösser als $y + l2$ werden,

wenn y positiv sein soll; da nun aber x^x unter derselben Bedingung sich im steten Abnehmen befindet, so wird $x^x < y + l2$ und y negativ, wenn $x < M$, wobei M den Werth des x bedeutet, wenn $y = 0$ wird. Ist $x > M$, so wird $x^x < y + l2$ sein.

Wir wollen nun obige Ungleichung $x > \frac{l(y + l2)}{lx}$ genauer untersuchen und sehen, wenn wir die Bedingung

$$x > 1$$

in Betracht ziehen, dass wir anstatt derselben den Ausdruck $x = 1 + \delta$ setzen können. Wenn wir nun dieses rechter Hand der Ungleichung einführen, so ergibt:

$$x > \frac{l(y + l2)}{l(1 + \delta)}$$

worin δ eine positive mit y in geradem Verhältnisse zunehmende Grösse bedeutet. Anstatt dessen können wir aber auch schreiben

$$x = \frac{l(y + l2)}{l(1 + \delta)} + \delta$$

oder wenn wir mit $l(1 + \delta)$ multipliciren

$$x l x = l(y + l2) + l(1 + \delta)^\delta$$

und schliesslich

$$x^x = (y + l2)(1 + \delta)^\delta$$

woraus ersichtlich ist, dass beim Wachsthum des δ das x^x im raschen Zunehmen begriffen ist.

Für das Minimum des ersten Gliedes erhalten wir $x^x = 1$ für $\begin{cases} x=0 \\ x=1 \end{cases}$. Hiervon ergibt sich also $l \frac{x^2 + 1}{x} = 1 - y$, für $x > 0$ ist $x^x < 1$, also auch $l \frac{x^2 + 1}{x} < (1 - y)$ oder

$$x < \frac{e^{1-y}}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{e^{1-y}}{2}\right)^2 - 1}$$

wogegen für $x > 1$, ist $x^x > 1$, somit auch $l \frac{x^2 + 1}{x} > 1 - y$, und

$$x > \frac{e^{1-y}}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{e^{1-y}}{2}\right)^2 - 1}$$

wo y entweder negativ oder den Werth $(1 - l2)$ nicht übersteigen darf, wenn reell bleiben soll. Es wird demgemäss für y , deren Werthe grösser als $(1 - l2)$ sind, nur eine Wurzel stattfinden, deren Näherungswerth m sich aus Relation

$$x > \frac{l(y + l2)}{l(1 + \delta)}$$

ergeben wird.

Ein zweites Beispiel liefert uns die Gleichung (1), wenn wir in derselben $f(A, B) = A \cdot B$, $f(C, D) = C + D$, sodann $\varphi(x) = e^{\frac{x+1}{x-1}}$, $\psi(x) = x$, $\chi(x) = x^2$ und $\theta(x) = \frac{1}{x^2 - 2}$ einsetzen.

Die Gleichung wird daher die Form

$$(c) \quad \dots \dots \dots y = \frac{x+1}{x-1} l x + l \frac{x^2-1}{x^2-2}$$

besitzen, woraus sich, wenn wir hierin $\frac{x^2-1}{x^2-2} = z$ setzen, die Gleichung

$$l \sqrt{2 + \frac{1}{\delta}} > y \frac{\sqrt{2} - 1}{\sqrt{2} + 1}, \quad 2 + \frac{1}{\delta} > e^{2y} \frac{\sqrt{2} - 1}{\sqrt{2} + 1}$$

und schliesslich

$$\delta < \left[e^{2y} \frac{\sqrt{2} - 1}{\sqrt{2} + 1} - 2 \right]$$

ergibt, woraus die Relation entspringt

$$-1 < \delta < \left[e^{2y} \frac{\sqrt{2} + 1}{\sqrt{2} - 1} - 2 \right]$$

deren Ergebniss, in die Relation (α) eingesetzt, uns zur Bestimmung des ersten Näherungswerthes genügt.

Wollen wir z. B. für den Werth $y = 2.33$ das z berechnen, so setzen wir diesen Werth in die betreffende Relation, woraus sich $\delta < 0.226 \dots$ ergibt; setzen wir also $\delta = 0.2$ und substituieren diesen Werth in die Relation (α), so ergibt sich hieraus $z < 1.3 \dots$ demnach können wir $z = 1.2$ als ersten Näherungswerth annehmen. Daraus ergibt sich mittelst der Ersatzgleichung (c_1) Folgendes:

$m_1 = 1.162636$	$m_4 = 1.146960$	$m_7 = 1.151470$	$m_{10} = 1.150722$
$m_2 = 1.062627$	$m_5 = 1.149754$	$m_8 = 1.150912$	$z = 1.1507 \dots$
$m_3 = 1.135780$	$m_6 = 1.152450$	$m_9 = 1.150787$	

auf 4 Decimalen genau berechnet.

Aus diesem ergibt sich mittelst der Gleichung

$$x = \sqrt{\frac{1 - 2z}{1 - z}} = 2.938003$$

Als nächstes Beispiel diene Folgendes:

Es sei in der Gleichung (1) $f(A, B) = A : B$ und $f(C, D) = C : D$, sodass $\varphi(x) = e^{x^2 + 1}$, $\psi(x) = e^x$, $\chi(x) = x + 3$ und $\theta(x) = x + 1$, so wird sich die Gleichung

$$(d) \quad \dots \quad y = \frac{x^2 + 1}{x} + \frac{l(x + 3)}{l(x + 1)}$$

ergeben, woraus die Substitutionsgleichung

$$(d_1) \quad \dots \quad x = \frac{m + k}{m + q} \left[\frac{1}{2} \left(y - \frac{l(m + 3)}{l(m + 1)} \pm \sqrt{\left[y - \frac{l(m + 3)}{l(m + 1)} \right]^2 - 4} \right) \right]$$

folgt.

Wollen wir nun die Anzahl und die Näherungswerthe der Wurzeln der Gleichung (d) eruiren, so gehen wir nach der bekannten Art vor.

Das Minimum des zweiten Gliedes ergibt sich für $x = -1$, wo $\frac{l(x + 3)}{l(x + 1)} = 0$ wird. Ist nun x im Wachsthum begriffen, also $x > -1$, so wird

auch demzufolge $\frac{l(x + 3)}{l(x + 1)} < 0$ werden, also im Abnehmen begriffen sein und

wird bei $x = 0$ den Werth $\pm \infty$ erreichen. Da nun aber auch das erste Glied für $0 > x > -1$ negativ bleibt, so wird die Relation

$$0 > x > -1$$

Fürs zweite würde $e^{2(x+1)}$, für den Werth $x = \sqrt{\frac{\pi}{2} - 1}$ das Maximum
 reichen, weshalb für endliche Werthe des y , $x \leq \sqrt{(2n+1)\frac{\pi}{2} - 1}$ sein mu-
 Aber auch für $x = \sqrt{x-1}$ erreicht das erste Glied einen endlichen Werth wie
 $x=0$, d. h. den Minimalwerth, es wird demnach für $x > 0$ auch $x \geq \sqrt{n \cdot x}$
 sein müssen.

Aus diesen beiden Ungleichungen lässt sich nun folgende Relation
 stellen.

$$\sqrt{n_1 \cdot x - 1} > x > \sqrt{(2n+1)\frac{\pi}{2} - 1}, \quad n_1 = n - 1$$

$$\sqrt{n \cdot x - 1} < x < \sqrt{(2n+1)\frac{\pi}{2} - 1}, \quad n = n$$

Für das zweite Glied erhalten wir ein Minimum, wenn $x = \infty$ wird, da-
 nach $\arccos \frac{x-1}{x+1} = 0$ wird; und somit auch $e^{2(x+1)} = y$. Wird sodann $x <$
 so ergibt sich $\arccos \frac{x-1}{x+1} > 0$ und auch

$$e^{2(x+1)} > y \quad x > \sqrt{\arctg l(y) - 1}$$

erreicht nun x den Werth $x=1$, so wird $\arccos \frac{x-1}{x+1} = \frac{\pi}{2}$ und für $x > 1$ v

$$\arccos \frac{x-1}{x+1} < \frac{\pi}{2}$$

wogegen für $x < 1$

$$\arccos \frac{x-1}{x+1} > \frac{\pi}{2} \text{ respective } > (4n+1)\frac{\pi}{2} \text{ oder } < (2n+1)\frac{\pi}{2}$$

demzufolge ergibt sich für $x > 1$

$$e^{2(x+1)} < y + \frac{\pi}{2}, \quad x < \sqrt{\arctg l\left(y + \frac{\pi}{2}\right) - 1}$$

wogegen für $x < 1$

$$e^{2(x+1)} > y + \frac{\pi}{2}, \quad x > \sqrt{\arctg l\left(y + \frac{\pi}{2}\right) - 1}$$

und endlich wird für $x=0$ das Glied

$$\arccos \frac{x-1}{x+1} = (2n+1)\pi$$

Die Ersatzgleichung des angeführten Beispieles lautet nun folgen-
 massen:

Der erste Näherungswerth q ergibt sich aus der Relation

$$m > \frac{1 + \operatorname{Cos} e^{tg} 1}{1 - \operatorname{Cos} e^{tg} 1}$$

oder, was ebensoviel ist

$$m > 1.07 \dots m = 1.2$$

daraus ergibt sich

$$\frac{m-1}{m+1} = 0.091, \operatorname{arc} \operatorname{Cos} 0.091 \left\{ \begin{array}{l} \operatorname{arc} 84^\circ 46' 44'' = 1.47967 \\ \operatorname{arc} 275^\circ 13' 16'' = 4.80350 \end{array} \right.$$

$$\operatorname{arctg} l 1.47967 = \operatorname{arc} tg 0.39182 \left\{ \begin{array}{l} \operatorname{arc} 21^\circ 23' 47'' = 0.3734374 = B_1 \\ \operatorname{arc} 201^\circ 23' 47'' = 3.5150200 = B_2 \end{array} \right.$$

$$\operatorname{arc} tg l 4.80350 = \operatorname{arc} tg 1.56934 \left\{ \begin{array}{l} \operatorname{arc} 57^\circ 29' 45'' = 1.0034917 = C_1 \\ \operatorname{arc} 237^\circ 29' 45'' = 3.1450843 = C_2 \end{array} \right.$$

daraus ergibt sich also

$$\left. \begin{array}{l} x_1 = 0.791556 \sqrt{-1}, \quad x_2 = 1.585881 \\ x_3 = 0.059090, \quad x_4 = 1.776552 \end{array} \right\} \text{ als } m_1$$

da nun x_1 schon an und für sich imaginär ist, und $x_3 < 1.07$, so sind beiden Wurzeln imaginär. Durch Wiederholung obiger Procedur ergibt wenn wir für m den Werth von x_2 einsetzen, Folgendes:

$$\operatorname{arc} \operatorname{Cos} 0.2265692 \left\{ \begin{array}{l} \operatorname{arc} 76^\circ 54' 10'' = 1.342220 \\ \operatorname{arc} 283^\circ 5' 50'' = 4.940979 \end{array} \right.$$

$$\operatorname{arc} tg l 1.342220 = \operatorname{arc} tg 0.293324 \left\{ \begin{array}{l} 16^\circ 20' 52'' = 0.2853226 = B_1 \\ 196^\circ 20' 52'' = 3.4271152 = B_2 \end{array} \right.$$

demnach

$$x_1 = 0.845386 \sqrt{-1}, \quad x_2 = 1.557920 \left\{ \text{ als } m_2 \right.$$

Wiederholen wir nun diese Procedur für x_1 und x_2 nochmals, so gibt sich

$$\operatorname{arc} \operatorname{Cos} 0.2181147 \left\{ \begin{array}{l} \operatorname{arc} 77^\circ 36' 53'' = 1.3546325 \\ \operatorname{arc} 282^\circ 23' 7'' = 4.9285527 \end{array} \right.$$

$$\operatorname{arc} tg l 1.3546325 = \operatorname{arc} tg 0.303529 \left\{ \begin{array}{l} 16^\circ 53' 4'' = 0.2946892 = B_1 \\ 196^\circ 53' 4'' = 3.4362818 = B_2 \end{array} \right.$$

demnach ergibt sich

$$x_1 = 0.839827 \sqrt{-1}, \quad x_2 = 1.560859 \left\{ \text{ als } m_3 \right.$$

ferner m_3 eingesetzt ergibt:

$$\operatorname{arc} \operatorname{Cos} 0.2190120 \left\{ \begin{array}{l} \operatorname{arc} 77^\circ 20' 56'' = 1.3499928 \\ \operatorname{arc} 282^\circ 39' 4'' = 4.9331924 \end{array} \right.$$

$$\operatorname{arc} tg l 1.3499928 = \operatorname{arc} tg 0.300104 \left\{ \begin{array}{l} 16^\circ 42' 17'' = 0.2915524 = B_1 \\ 196^\circ 42' 17'' = 3.4331450 = B_2 \end{array} \right.$$

Ist nun x sehr klein, so wird z und v nahezu gleich gross werden können daher $x + \tau = z$ und $x + \delta = v$ setzen und erhalten

$$(1) \quad \dots \quad e^{-2z} + e^{2v} = 2 \text{ oder } 1 + e^{2(v+z)} = 2e^{2z}$$

was ebenso viel ist wie $1 + e^{2v} = 2e^{2z}$, somit $z = \frac{1}{2} l \frac{1 + e^{2v}}{2}$ und dem a

auch, wenn wir die Gleichung (1) mit e^{-2v} multipliciren, $v = -\frac{1}{2} l \frac{1 -}{2}$

daher, wenn wir die Gleichung $y = z + v$ in Betracht ziehen, sich die Gleichung

$$(2) \quad \dots \quad y = \frac{1}{2} l \frac{1 + e^{2y}}{2} - \frac{1}{2} l \frac{1 + e^{-2y}}{2} \text{ ergeben muss.}$$

Zu demselben Resultate gelangen wir aber auch auf folgende Art:

Betrachten wir die beiden derivirten Ausdrücke

$$\frac{dz}{dx} = e^x \cdot (\cos x + \sin x)$$

$$\frac{dv}{dx} = e^{-x} \cdot (\cos x - \sin x)$$

so finden wir, da beim Wachsthum des x das z im Zunehmen, dagegen im Abnehmen begriffen ist, sich die beiden approximativen Proportionen stellen lassen

$$\frac{dz}{dx} = \frac{e^{-z}}{e^{-x}}, \quad \frac{dv}{dx} = \frac{e^{-x}}{e^{-v}}$$

wobei die erstere eine gerade, die letztere dagegen eine ungerade ist.

Hieraus ergibt sich sofort

$$e^{-z} = \cos x + \sin x$$

$$e^v = \cos x - \sin x$$

und demnach auch das Ergebniss:

$$(1) \quad \dots \quad e^{-2z} + e^{2v} = 2$$

welches mit der vorigen Relation identisch ist.

Setzen wir nun die Untersuchung in Betreff der Gleichung (c) fort, so uns sogleich klar, dass

$$z = e^x \cdot \sin x = \frac{1}{2} l \frac{1 + e^{2y}}{2}$$

$$v = e^{-x} \cdot \sin x = \frac{1}{2} l \frac{2}{1 + e^{-2y}}$$

sein muss und demzufolge auch

$$\sin x = \frac{1}{2} \sqrt{l \frac{1 + e^{2y}}{2} \cdot l \frac{2}{1 + e^{-2y}}}$$

und $e^{2z} = \frac{l \frac{1 + e^{2y}}{2}}{l \frac{2}{1 + e^{-2y}}}$ sich ergibt, welche beiden Ausdrücke die Schlussre

von folgender Form liefern:

Da nun aber $l/2 = -0.366$ ist, so wird σ demzufolge nur einen n Werth besitzen können; wenn wir daher in der Gleichung (4) das Zeic σ ändern, so ergibt sich

$$(5) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 2 \operatorname{arc Sin} \left[\pm \frac{e^{\frac{\rho - \sigma}{2}}}{2} \right] = \rho + \sigma$$

wobei σ positiv sein muss und zwischen $+\alpha$ und $+0.366$ sich bewegt

Aus der Gleichung (5) entspringen nun folgende neue Gleichunge: Näherungswerthe durchwegs durch Reduction nach der Relation (3) g werden können.

Setzen wir in der Gleichung (5)

$$\frac{\rho - \sigma}{2} = \gamma \quad \text{und} \quad \frac{\rho + \sigma}{2} = \delta$$

so ergibt sich

$$\operatorname{arc Sin} \left(\pm \frac{e^{\gamma}}{2} \right) = \delta \quad \text{und} \quad \gamma = l(\mp 2 \operatorname{Sin} \delta)$$

und daher durch Rechnung

$$(6) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad \rho = \delta + l(\pm 2 \operatorname{Sin} \delta)$$

$$(7) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad \sigma = l(\pm 2 \operatorname{Sin} \delta) - \delta$$

Ferner ist

$$\operatorname{arc Sin} \left(\pm \frac{e^{\gamma}}{2} \right) = \operatorname{arc tg} \left(\pm \frac{e^{\gamma}}{\sqrt{4 - e^{2\gamma}}} \right) = \delta$$

daraus ergibt sich, wenn wir

$$e^{\alpha} = \frac{\pm e^{\gamma}}{\sqrt{4 - e^{2\gamma}}} = \operatorname{tg} \delta \quad \text{setzen,} \quad \gamma = \frac{1}{2} l \frac{4 \operatorname{tg}^2 \delta}{1 + \operatorname{tg}^2 \delta}$$

Indem aber den obigen Gleichungen gemäss $\delta + \gamma = \rho$ ist, so v Gleichung

$$(8) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad \operatorname{arc tg} e^{\alpha} + \frac{1}{2} l \frac{4 e^{2\alpha}}{1 + e^{2\alpha}} = \rho$$

entspringen, aus welcher sich durch fernere Substitution abermals eine l neuer Gleichungen ergeben.

$$m_2 - m'_1 = 1.2637 - 1.26538 = \delta_2 = -0.00168$$

sowie auch

$$m'_2 = m_2 + \delta_2 = 1.2637 - 0.00168 = 1.26202$$

Wenn wir nun diesen Werth wieder in die Ersatzgleichung einsetzen ergibt sich

$$m_3 = (10.26914)^{\frac{1}{10}} = 1.26227$$

$$m_3 - m'_2 = 1.26227 - 1.26202 = 0.00025 = \delta_3$$

$$m'_3 = m_3 + \delta_3 = 1.26252$$

$$m_4 = (10.28683)^{\frac{1}{10}} = 1.26249$$

$$m_4 - m'_3 = \delta_4 = -0.00003$$

$$m'_4 = m_4 + \delta_4 = 1.26246$$

$$m_5 = (10.28471)^{\frac{1}{10}} = 1.2624605$$

Da nun, wie ersichtlich, m'_4 und m_5 auf fünf Decimalstellen miteinander übereinstimmen, so folgt hieraus

$$u = 1.2624605 \dots$$

welches nach fünf Procedures auf 6 Decimalstellen genau bestimmt ist.

Der Gleichung (7) gemäss erhalten wir also als Resultat

$$p = (1.2624605)^{\frac{1}{4}} - 1 = 0.0600026$$

Es ist nun aber auch

$$P = 100 \cdot p, \text{ also ist } P = 6.00026$$

d. h. jene Beträge müssen auf 6% angelegt werden, um den gegebenen gungen zu entsprechen.

Wie ersichtlich, können die Differenzen $\delta_1, \delta_2, \delta_3 \dots$ sowohl positiv auch negativ sein.

Als zweites Beispiel gelte Folgendes:

$$a?, A = 18000, R = 340.15, n = 12, p = \frac{P}{100} = 0.045$$

In diesem Falle lautet also die hierzu gehörige Ersatzgleichung wie

$$\frac{A}{R} = 52.91783,$$

$$\text{somit } u = E_{m > 1} \left[1 - 52.91783(1 - m) \right]^{\frac{1}{12}}$$

Für $m = 1.1$ erhalten wir

$$m_0 = (6.5292)^{\frac{1}{12}} = 1.1656$$

Wir können nämlich für die ersteren Näherungswerthe die jeweiligen abrunden, um schneller rechnen zu können.

$$m_0 - m = 0.0656 = \delta$$

$$m'_0 = m_0 + \delta = 1.2312$$

hieraus ergibt sich

Dr. Ludwig Grossmann's

ische Anwendung der Theorie und Lösung der irreductibelen
 dependenten Gleichungen auf die Zinseszins- und Rentenrechnung.

II.

Als zweites Beispiel gelte folgendes: Es sei $K = 3019.65$, $R = 800$,
 00 . $p = 6$, $n = 20$, a ?

$$\frac{R}{K} = 0.264983$$

$$u = \mathop{\text{E}}_{\substack{1 < m < \frac{R}{K} + 1 \\ m < 1.264983 \text{ respective } m = 1.26}} \left(1 + 0.264983 (1 - m^{-20}) \right)$$

1.262378 , $m_1 = 1.2624755$, $m_2 = 1.2624781$, $m_3 = 1.262478$ also $u = 1.262478$
 mit der Formel (21) gemäss

$$a = \frac{\lg u}{\lg (1+p)} = \frac{0.1012236}{0.0253059} = 4$$

IV.

Die Fundamentalformel

$$A(1+p)^n + \frac{R[(1+p)^n - 1]}{p} = K$$

offenbar auch auf folgende Weise geschrieben werden:

$$\left(A + \frac{R}{p}\right)(1+p)^n = K + \frac{R}{p} \text{ resp. } (1+p)^n = \frac{Kp + R}{Ap + R}$$

als die einzige continuirliche der Gleichung (22) entsprechende Ersatzgleichung

$$p = \mathop{\text{E}}_{m > 0} \left(\left[\frac{K m + R}{A m + R} \right]^{\frac{1}{n}} - 1 \right)$$

geht, welcher folgende Aufgabe entspricht: Zu welchem Zinsfusse $P = 100p$
 ein Capital A verzinslich angelegt werden, um bei einer am Ende eines
 Jahres stattfindenden Zulage R nach n Jahren den Endwerth K zu erreichen?
 . B. es sei:

$$K = 20722.37, A = 5000, R = 1000, n = 10, p?$$

! die Ersatzgleichung hiefür folgendermassen lauten:

$$p = \mathop{\text{E}}_{m > 0} \left(\left[\frac{20722.37 m + 1000}{5000 m + 1000} \right]^{\frac{1}{10}} - 1 \right)$$

mittels Anwendung der Differenzen-Methode ergibt sich also für $m > 0$
 $= 0.1$

$$\begin{aligned}
m_0 &= 0.07491 & \delta &= m_0 - m = -0.02509 \\
m'_0 &= 0.04982 \\
m_1 &= 0.04991 & \delta_1 &= m_1 - m'_0 = +0.00009 \\
m'_1 &= 0.05000 \\
m_2 &= 0.050000 & \delta_2 &= m_2 - m'_1 = -0.000000
\end{aligned}$$

demnach $p = 0.05$.

V.

Auf eine ganz andere Art gestaltet sich jedoch die Auffindung der Gleichung für die Fundamentalformel

$$(25) \quad A(1+p)^n - \frac{R[(1+p)^n - 1]}{p} = K$$

Wir werden nemlich hier die drei Fälle unterscheiden müssen, wo $K > A$, $K < A$ und $K = A$ ist.

Jeder dieser drei Fälle liefert uns für p eine andere Gleichung, welche Anforderungen der Continuität entspricht.

Setzen wir in der Gleichung (25) den Ausdruck

$$(1+p)^n = u \text{ resp. } p = u^{\frac{1}{n}} - 1$$

so ergibt sich offenbar die Gleichung

$$(26) \quad u^{\frac{1}{n}} - \frac{R(u-1)}{A u - K} - 1 = 0$$

aus welcher die Ersatzgleichung

$$(27) \quad u = \mathop{\text{E}}_{m > 1}^{K < A} \left(1 + \frac{R(m-1)}{A m - K} \right)^n$$

im A hervorgeht.

Setzen wir ferner bei der Gleichung (25) den Ausdruck

$$(1+p)^n \left(A - \frac{R}{p} \right) = K - \frac{R}{p}$$

als die Ersatzgleichung bildende Form voraus, so ergibt sich

$$(28) \quad p = \mathop{\text{E}}_{\substack{R < p_0 \\ A < p_0 > 0}}^{K > A} \left(\left[\frac{K p_0 - R}{A p_0 - R} \right]^{\frac{1}{n}} - 1 \right)$$

als Ersatzgleichung für $K > A$, worin p_0 ebenso, wie in früheren Ersatzgleichungen, als Ersatzwerth zu betrachten ist. Aus der Gleichung (26) geht ebenfalls auch die Gleichung für $K = A$ hervor; dieselbe lautet:

$$(29) \quad p = \frac{R}{A} \text{ resp. } p = \frac{R}{K}$$

Den drei letzten Formeln entspricht nun folgende Aufgabe:

Zu welchem Zinsfusse $P = 100p$ muss ein Capital A verzinslich angelegt werden, wenn dasselbe bei einer am Ende eines jeden Jahres erfolgenden Annuität von dem Betrag R nach n Jahren den Endwerth K erhalten soll?

Z. B. es wäre die Aufgabe gestellt:

$$K = 1447, A = 6000, R = 500, n = 15, P = 100p?$$

VI.

Die Fundamentalformel

$$(30) \quad A(1+p)^{an} + \frac{R[(1+p)^{an} - 1]}{(1+p)^a - 1} = K$$

übergeht für die Substitution

$$(31) \quad (1+p)^a - 1 = u \text{ in die Form}$$

$$(32) \quad \left(A + \frac{R}{u}\right)(u+1)^n = K + \frac{R}{u} \text{ respective } (u+1)^n = \frac{Ku + R}{Au + R}$$

aus welcher sich offenbar die Ersatzgleichung

$$(33) \quad u = E \left(\left[\frac{Km + R}{Am + R} \right]^{\frac{1}{n}} - 1 \right)$$

ergibt, welche mit den aus der Gleichung (31) entspringenden Relation

$$(34) \quad p = (u+1)^{\frac{1}{a}} - 1$$

$$(35) \quad a = \frac{\lg(u+1)}{\lg(p+1)}$$

folgenden zwei Aufgaben entspricht. Jene mit der Relation (34) correspondirende lautet nun:

Zu welchem Zinsfusse $P = 100p$ muss ein Capital A verzinslich werden, um bei in Intervallen von je a Jahren erfolgenden gleichen Zinsen nach an Jahren den Endwerth K zu erreichen?

Jene der Relation (33) entsprechende ergibt sich folgendermassen:

Ein zu dem Zinsfusse P verzinslich angelegtes Capital A erhält hintereinander in gleichen Intervallen eine gewisse Zulage R und das Capital schliesslich den Endwerth K . — Wie viel Jahre sind regelmässig zwischen zwei Einzahlungen verflossen?

Zur Documentirung der praktischen Anwendbarkeit obiger Formeln wir nun für jede einzelne Aufgabe ein Beispiel durchführen.

Es sei z. B. $K = 13673 \cdot 10$, $A = 2000$, $R = 400$, $a = 3$, $n = 10$, $p = ?$, sich offenbar folgende Ersatzgleichung, wenn wir die betreffenden Werthe in Gleichung (33) substituiren:

$$u = E \left(\left[\frac{13673 \cdot 10 \cdot m + 400}{2000 \cdot m + 400} \right]^{\frac{1}{10}} - 1 \right)$$

Als erster einzusetzender Näherungswerth ist $m > 0$ respective $m = 0$

$$m_0 = 0 \cdot 11408 \quad \delta = m_0 - m = + 0 \cdot 01408$$

$$m'_0 = 0 \cdot 12816$$

$$m_1 = 0 \cdot 12610 \quad \delta_1 = m_1 - m'_0 = - 0 \cdot 00206$$

$$m'_1 = 0 \cdot 12404$$

$$m_2 = 0 \cdot 12456 \quad \delta_2 = m_2 - m'_1 = + 0 \cdot 00052$$

$$m'_2 = 0 \cdot 12508$$

$$m_3 = 0 \cdot 12497 \quad \delta_3 = m_3 - m'_2 = - 0 \cdot 00011$$

$$m'_3 = 0 \cdot 12486$$

$$m_4 = 0 \cdot 12486$$

das heisst $u = 0 \cdot 12486$ und der Gleichung (34) gemäss

$$p = (1 \cdot 12486)^{\frac{1}{3}} - 1 = 0 \cdot 04001, \text{ also } P = 100 p = 4\%.$$

$v = 0.3700831$, somit nach (44)

$$p = (1.3700831)^{\frac{1}{5}} - 1 = 0.065$$

Beispiel gelte folgendes:

68.42, $A = 10000$, $K = 2000$, $n = 8$, $p = 0.04125$, $a?$

tlich, werden wir hier die Form (39) benutzen müssen, da
somit die Ersatzgleichung

$$u = \sum_{m=1}^{\infty} \left(1 + \frac{2000(m-1)}{10000m - 968.42} \right)^5$$

l respective $m = 1.1$ als erster Näherungswert eingesetzt, fol-
gibt:

$$m_0 = 1.17166 \quad \delta = m_0 - m = +0.07166$$

$$m'_0 = 1.24332$$

$$m_1 = 1.39543 \quad \delta_1 = m_1 - m'_0 = +0.15211$$

$$m'_1 = 1.54754$$

$$m_2 = 1.79012 \quad \delta_2 = m_2 - m'_1 = +0.25258$$

$$m'_2 = 2.04270$$

$$m_3 = 2.15484 \quad \delta_3 = m_3 - m'_2 = +0.11214$$

$$m'_3 = 2.26698$$

$$m_4 = 2.44080 \quad \delta_4 = m_4 - m'_3 = +0.17382$$

$$m'_4 = 2.61462$$

$$m_5 = 2.62570 \quad \delta_5 = m_5 - m'_4 = +0.01108$$

$$m'_5 = 2.63678$$

$$m_6 = 2.63750 \quad \delta_6 = m_6 - m'_5 = +0.00072$$

$$m'_6 = 2.63822$$

$$m_7 = 2.638265 \quad \delta_7 = m_7 - m'_6 = +0.000045$$

$$m'_7 = 2.638301$$

$$m_8 = 2.638301 \quad \delta_8 = m_8 - m'_7 = +0.000000$$

ist $u = 2.638301$ und der Relation (45) zufolge ergibt sich der
e folgt:

$$a = \frac{\lg 2.638301}{8 \lg 1.04125} = \frac{0.4213244}{0.1404416} = 3$$

VIII.

an schliesslich die Fundamentalformel*)

$$= \frac{(1+p)^n - 1}{p(1+p)^{n-1} - 1} \text{ respective } \frac{A}{R} = \frac{1 - (1+p)^{-n}}{p(1+p)^{-1} - 1}$$

der Untersuchung zu unterziehen. Der Form (46) entspricht
orm

$$(1+p)^{-n} \cdot \frac{1 - (1+p)^{-n}}{\frac{p}{1+p} - 1} = \frac{A}{R}$$

ir in denselben den Ausdruck

$$(1+p)^{-n} = u \text{ respective } p = u^{-\frac{1}{n}} - 1$$

de Gleichung übergeht:

über Prof. Kunze's Abhandlung: Die wichtigsten Formeln der Zins- und Renten-
f. Dr. Oscar Simony, seine Abhandlung über dasselbe Thema.

Gleichung (3) entsprechende Rentenintervall, von denen jedoch jede bloß ihre Existenzberechtigung beibehält, als die in den Gleichungen (1) und (2) enthaltenen, der fraglichen Unbekannten entsprechenden, analog bezeichneten a eine Differenz aufweisen. In dem Momente z. B., wo die Renten a und b einander gleich sind, verliert auch v die Beschaffenheit einer Unbekannten und wird demzufolge

$$a = b = v$$

Wir wollen daher, um unsere Frage einfacher zu gestalten, diesen v bis auf weiteres festhalten und uns bloß mit den beiden Unbekannten a und b , d. i. Zinsfuß und Anlagedauer, beschäftigen.

Die Gleichungen (1), (2) und (3) erfahren daher eine Veränderung folgendem Sinne:

$$4) \quad K_n = f(K_1, R_1, p, n, a)$$

$$5) \quad K_m = f(K_2, R_2, q, m, a)$$

$$6) \quad K_n + K_m = f[(K_1 + K_2), (R_1 + R_2), x, t, a]$$

Nun bedürfen wir aber, da wir hier offenbar zwei Unbekannte und eine Gleichung haben, in welcher dieselben vorkommen, zu einer rationellen noch eine zweite Gleichung, welche wir mit Hilfe folgender Norm erreichen.

Nehmen wir an, es wäre die Anlagedauer $m > n$, so werden wir folgenden Moment zu ermitteln haben, in welchem die Capitalsvergrößerung von K_n durch einen entsprechenden Zuwachs der Anlagedauer gleich der Capitalsverminderung von K_m durch eine gewisse Abnahme der Anlagedauer n solange wachsen und m solange abnehmen muss, bis beide einander gleich sind; dieses Ergebniss ist sodann die gesuchte gemeinschaftliche Anlagedauer t .

Wir können daher folgende Relation, die den genannten Anforderungen entspricht, aufstellen: Bezeichnen wir diejenigen, den Functionen f und f' entsprechenden wirkenden Procedures, beziehungsweise mit φ und ψ , die gesuchte gemeinschaftliche Anlagedauer mit t , so wird der Zuwachs von K_n in der Zeit $t - n$ gleich der Abnahme von K_m in der Dauer $t - m$ stattfinden; somit die Form, welche diesen Auseinandersetzungen entspricht

$$7) \quad \varphi[f(K_1, R_1, p, n, a), t - n] = \psi[f'(K_2, R_2, q, m, a), t - m]$$

respective

$$K_n + K_m = f(K_1, R_1, p, t, a) + f'(K_2, R_2, q, t, a)$$

Aus der Gleichung (7) ist es uns nun möglich, die Unbekannte a zu bestimmen und durch Substitution derselben in die Gleichung (6) auch die anderen bekannten Grössen auszudrücken.

Um nun dieses Theorem der praktischen Anwendung zuzuführen, einige Beispiele hier folgen:

Es sei die Frage aufgeworfen, wie es möglich ist, zwei zu unterschiedlichen Zinsfüßen und Anlagedauern hinterlegte Capitalien zu einer einzigen Capitalien umzuwandeln.

und nach vollzogener Rechnung

$$t = 12.661$$

und der Gleichung (16) gemäss

$$\left(\frac{15016.8 + 10955.5}{8000 + 5000} \right)^{\frac{1}{t}} - 1 = x$$

somit nach vollzogener Rechnung $X = 100x = 5.62\%$.

Man kann daher, anstatt das Capital von 8000 fl. auf 10 Jahre mit 6 und 5000 fl. auf 20 Jahre mit 4%, ebensogut 13.000 fl. auf 12.661 Jahre 5.62% anlegen oder verzinsen.

Auf ähnliche Weise lassen sich Renten zusammenziehen, und zwar werden wir zu diesem Behufe abermals die Formen (4) und (5) zu Rathe ziehen.

Es seien daher

$$17) \quad K_n = f(K_1, R_1, p, n, a) = K_1 (1 + p)^n + \frac{R_1}{p} ((1 + p)^n - 1)$$

$$18) \quad K_m = f(K_2, R_2, q, m, a) = K_2 (1 + q)^m - \frac{R_2}{q} ((1 + q)^m - 1)$$

somit die fragliche Gleichung

$$19) \quad K_n + K_m = (K_1 + K_2) (1 + x)^t + \frac{R_1 - R_2}{x} ((1 + x)^t - 1)$$

an welche sich sodann die Hilfgleichung

$$K_1 (1 + p)^t + \frac{R_1}{p} ((1 + p)^t - 1) + K_2 (1 + q)^t - \frac{R_2}{q} ((1 + q)^t - 1) =$$

$$K_1 (1 + p)^n + \frac{R_1}{p} ((1 + p)^n - 1) + K_2 (1 + q)^m - \frac{R_2}{q} ((1 + q)^m - 1)$$

anschliesst, aus der wir abermals t ermitteln können.

Wir erhalten sonach

$$20) \quad \left(K_1 + \frac{R_1}{p} \right) (1 + p)^t + \left(K_2 - \frac{R_2}{q} \right) (1 + q)^t =$$

$$\left(K_1 + \frac{R_1}{p} \right) (1 + p)^n + \left(K_2 - \frac{R_2}{q} \right) (1 + q)^m$$

und

$$21) \quad t = \frac{m > n}{\lg} \left[\frac{\left(K_2 - \frac{R_2}{q} \right) (1 + q)^m + \left(K_1 + \frac{R_1}{p} \right) (1 + p)^n - \left(K_2 - \frac{R_2}{q} \right) (1 + q)^n}{\lg (1 + p)} \right]$$

als durchschnittliche Anlagedauer und durch Substitution des ermittelten Wertes derselben in die Gleichung (19) die Relation für den Durchschnittszins (Siehe S. 9, II.)

$$x = \frac{1}{\xi} \left[\left(\frac{(K_m + K_n) \xi + (R_1 - R_2)}{(K_1 + K_2) \xi + (R_1 - R_2)} \right)^{\frac{1}{t}} - 1 \right]$$

wodurch auch dieser Aufgabe entsprochen ist. — Wir haben hier absichtlich Renten R_1 und R_2 so angenommen, dass die ersteren in positivem, die letzteren in negativem Sinne auf das Anfangscapital K einwirkt, um anzudeuten, dass die allgemeinen Formeln für alle Fälle anwendbar sind.

Dem Gesagten zufolge wird daher der Rechnung in der Weise entsprochen, dass dem ursprünglichen, nach Zahlung der ersten Prämie gültigen versicherten Capital durch die jährlichen Zuschüsse in der Dauer z die Höhe des Eigenen zugemittelt wird.

Nehmen wir nun die Formel

$$2) \quad G = m N_1 \left(\frac{1+p}{p} \frac{(1+p)^n - 1}{p} - \frac{n}{p} \right)$$

in Anspruch, so ist G die Differenz der beiden genannten Capitalien, $N_1 = N - x$ die Originalnettoprämie, n die Dauer z und $P = 100 p$ als gewöhnlicher Zinsfuß gilt. Wir erhalten somit

$$3) \quad m N_1 = m (N - x) = \frac{G}{\left(\frac{1+p}{p} \frac{(1+p)^n - 1}{p} - \frac{n}{p} \right)}$$

Ferner da der Quotient

$$4) \quad \frac{k}{m} = \frac{1}{p} - \frac{n}{(1+p)[(1+p)^n - 1]}$$

ist und die Formel (1) in Betracht kommt, welche durch m dividirt sich dermassen gestaltet:

$$\frac{x}{m(N-x)} = \frac{k}{m},$$

so erhalten wir nach Substitution der Werthe von (3) und (4) das Resultat

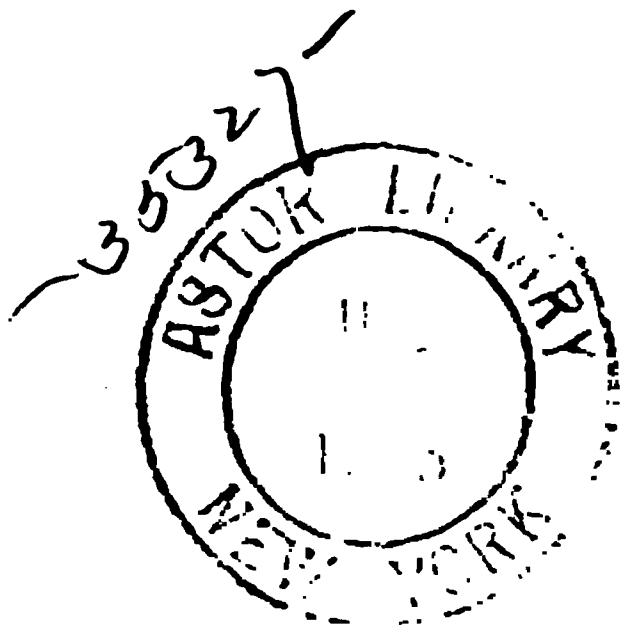
$$5) \quad x = \frac{G \cdot \left(\frac{1}{p} - \frac{n}{(1+p)[(1+p)^n - 1]} \right)}{\frac{1+p}{p} \frac{(1+p)^n - 1}{p} - \frac{n}{p}} = \frac{G \cdot p}{(1+p)[(1+p)^n - 1]}$$

Mit dem bekannten Werthe des x wird auch k , m und N_1 bekannt.

Um nun unserem Beispiele auch in dieser Weise zu entsprechen, wir dasselbe mit Hinzuziehung der neuen Daten zur Durchführung bringe

Die Nettoprämie per 100 fl. versichertes Capital für einen 35jährig 1.987, die erhöhte Prämie für denselben um 10.7 Jahre der Altersklasse ist somit das ursprünglich versicherte Capital sich zum eigentlichen verhalten 1.987 : 3.000; bei einem eigentlich versicherten Capital von 10.000 fl. wird nach eingezahlter erster Prämie bloss der Betrag von fl. 6623.33 nach dem Verhältniss versichert sein. Der Werth von G ist daher fl. 3376.67 und $P = 100p = 4$ wird $x = \text{fl. } 240.45$ bei einer erhöhten Nettoprämie von 1 fl. demnach ist $k = 4.0377$, $M = 100m = 79.37$ und $N_1 = \text{fl. } 59.55$.

Im Falle des Ablebens vor Ablauf der Frist von 10.7 Jahren wird die Formel (2) mit Hinzuziehung obiger Daten und Substitution der entsprechenden Versicherungsdauer für die Grösse n und die Höhe des auszubehaltenden versicherten Capitaless fixiren.



INHALT.

Versicherungstechnik.

Lebensversicherung:	Beiträge zur Berechnung der Kriegsprämie I	8
	Der Kriegsprämienzuschlag vom mathematischen Standpunkte I .	
	Untersuchungen über die Beschaffenheit der Prämienreserve I u. II .	4
Feuerversicherung:	Mathematische Limitirung der Feuerversicherungsprämie I, II u. III .	21, 2
	Mathematische Anleitung zur Schätzung der Brandschaden-Reserven I, II und III	57, 6

Finanztechnik.

Bankwesen:	Mathematische Reflexionen über den Boden- und Hypothekar-Credit I, II und III	29, 3
	Die Creditvereine und ihre innere Organisation I, II und III	53, 6
Finanzwesen:	Mathematische Principien für die Conversion von Tilgungsrenten I u. II .	
	Staats- und Prioritäts-Anlehen I	
Münzwesen:	Beiträge zur Lösung der Währungsfrage I	

Druckfehler:

Auf Seite 68. Die letzte Zahlenform soll heissen anstatt

$$R' = 0.233351 + \left(\frac{0.75143 - 0.33333}{0.75143} \right) \cdot 1.2 \cdot 6.13 = 2.67\text{‰}$$

richtig:
$$R' = 0.23335 \left(1 + \frac{0.75143 - 0.33333}{0.75143} \right) \cdot 1.2 \cdot 6.13 = 2.67\text{‰}$$

Auf Seite 23. Dritte Zeile unterhalb der Form 3) soll stehen anstatt „in wel
richtig: in welchen der Effect gleich 0 wird.

Im Ganzen wurden an die Besitzer von Renten-Obligationen m Tilgung bezahlt; nun hat aber das Capital K mit dem Zinsfusse $l' = 100p$ aufgezinst, den Werth $K(1+p)^m$ erreicht; hievon kommt die jeweilig un-
wartedauer weniger verzinste Tilgungsquote in Abzug, daher der entsprechende
mehrige Werth der Renten-Obligationen

$$2) \quad W = K(1+p)^m - \frac{Q}{p} [(1+p)^m - 1],$$

respective

$$3) \quad W = K(1+p)^m - \frac{K(1+p)^n [(1+p)^m - 1]}{(1+p)^n - 1}$$

$$\text{d. i. } W = K \frac{(1+p)^n - (1+p)^m}{(1+p)^n - 1}$$

Dieser Betrag W ist nun der der neuen Emission entsprechende und w
Falle wir den neuen Zinsfuss mit $P_1 = 100p_1$ und die entsprechende Tilg
mit t bezeichnen, die Formel für die neue Tilgungsquote lauten:

$$4) \quad Q_1 = \frac{W p_1 (1+p_1)^t}{(1+p_1)^t - 1}$$

Der verhältnissmässige Werth der Obligationen wird daher von Jahr zu
gender sein:

Im Allgemeinen gelten hier die Fundamentalformeln der Zinseszins- und
rechnung und wird, wenn Q die Tilgungsquote bezeichnet, nach dem erst

$$W_1 = K(1+p) - \frac{Q}{p} [(1+p) - 1],$$

nach dem zweiten Jahre

$$W_2 = K(1+p)^2 - \frac{Q}{p} [(1+p)^2 - 1],$$

nach dem dritten Jahre

$$W_3 = K(1+p)^3 - \frac{Q}{p} [(1+p)^3 - 1] \text{ u. s. f.}$$

den al pari-Werth der Tilgungsrenten bezeichnen.

Soll nun der jeweilige al pari-Werth auf Grund des ein Jahr vorher
gefunden werden und zwar in jenem Momente, wo eine neue Quote
wurde, so wird in folgender Weise verfahren werden müssen:

Die Formel

$$5) \quad \frac{W - \frac{Q}{p}}{K - \frac{Q}{l'}} = (1+p)^n$$

Ist daher z. B. die Anzahl der Gefahrmomente desjenigen Risicos, für die volle Grundprämie ohne Rabattnachlass gilt, $n_0 = 3$, so erhalten wir die

$$7) \quad p = g \left(1 + \frac{s+3}{9} \lg \frac{s+1}{6} \right)$$

Die Summe der Gefahräquivalente bei Giltigkeit der vollen Grundprämie daher $s = 5$, für welchen Fall $p = g$ wird; bei grösserer oder geringerer der Gefahräquivalenten gestaltet sich die Prämie nach der Formel (7) in folgender Weise:

Gefahr- Äquivalenten Summe s	Rabatt oder Zu- schlag zur Grund- prämie $g = 3.50\text{‰}$	Effective Prämie p
0	— 26%	2.60‰
1	— 21.2%	2.76‰
2	— 16.7%	2.92‰
3	— 11.7%	3.09‰
4	— 6.16%	3.28‰
5	0	3.50‰ = g
6	+ 6.7	3.73‰
7	+ 13.88%	3.99‰
8	+ 19.36%	4.18‰
9	+ 29.58%	4.54‰
10	+ 38.—%	4.83‰
u. s. w.	u. s. w.	u. s. w.

Es ist daher nur nothwendig, die verschiedenen Gefahrmomente mit den entsprechenden Äquivalenten zu versehen, um auf mathematischem Wege die Prämie zu erlangen zu können.

Nachdem dieser bahnbrechenden Idee in kurzen Zügen Raum gegeben ist, noch hervorzuheben, dass die unserer Rechnung zugrunde liegenden Momente mit grosser Umsicht gesammelten statistischen Daten entsprechen, aus vergleichenden Scala der Gefahrmomente und der aus den wirklichen Brandschäden sich ergebenden Gefahräquivalente, beziehungsweise dem entsprechenden jeweiligen Gefahreffekt die Steigung des Risicos analytisch dargestellt ist. Die Art und Weise, wie sich die der successiven Steigerung der Gefahreffekte entsprechenden Prämienresultate dem Fachkundigen präsentiren, deuten auf eine gut durchdachte und erwogene Untersuchung der für diese Aufgabe wichtigen Voraussetzungen hin.

Prämien - Tabelle
für Fabriken- und Gebäude-Risico.

Summe der Gefahr- äquivalenten- Factoren oder Anzahl der Gefahreinh. $\sum \sigma$	Fabriken-Risico		Gebäude-Risico	
	Gefahr- Äquivalenten- Summe s für $g = 3.5$	Prämie ‰	Gefahr- Äquivalenten- Summe s für $g = 1.5$	Prämie ‰
0	0	2.592	0	1.274
0.1	0.35	2.656	0.15	1.306
0.2	0.70	2.711	0.30	1.339
0.3	1.05	2.765	0.45	1.372
0.4	1.40	2.819	0.60	1.405
0.5	1.75	2.874	0.75	1.440
0.6	2.10	2.931	0.90	1.476
0.7	2.45	2.991	1.05	1.512
0.8	2.80	3.052	1.20	1.550
0.9	3.15	3.116	1.35	1.588
1.0	3.50	3.184	1.50	1.627
1.1	3.85	3.254	1.65	1.667
1.2	4.20	3.326	1.80	1.708
1.3	4.55	3.400	1.95	1.750
1.4	4.90	3.477	2.10	1.792
1.5	5.25	3.557	2.25	1.836
1.6	5.60	3.638	2.40	1.880
1.7	5.95	3.722	2.55	1.925
1.8	6.30	3.808	2.70	1.971
1.9	6.65	3.895	2.85	2.017
2.0	7.00	3.986	3.00	2.063
2.1	7.35	4.078	3.15	2.112
2.2	7.70	4.171	3.30	2.160
2.3	8.05	4.266	3.45	2.213
2.4	8.40	4.364	3.60	2.260
2.5	8.75	4.463	3.75	2.310
2.6	9.10	4.564	3.90	2.361
2.7	9.45	4.667	4.05	2.413
2.8	9.80	4.771	4.20	2.465
2.9	10.15	4.877	4.35	2.517
3.0	10.50	4.983	4.50	2.571
3.1	10.85	5.091	4.65	2.625
3.2	11.20	5.202	4.80	2.679
3.3	11.55	5.314	4.95	2.734
3.4	11.90	5.426	5.10	2.789
3.5	12.25	5.540	5.25	2.845
3.6	12.60	5.656	5.40	2.902
3.7	12.95	5.675	5.55	2.957
3.8	13.30	5.895	5.70	3.011
3.9	13.65	6.010	5.85	3.07
4.0	14.00	6.130	6.00	3.1

Nachdem wir uns die Ueberzeugung verschafft haben, dass eine solche auch das Absterbegezet geometrisch darzustellen gestattet, und somit auch deren Factor für die Ermittlung der Prämienreserve, nämlich die Prämie für Bruchtheile zu berechnen uns in die Lage setzt, so wollen wir zu deren Bestimmung schreiten.

Zwischen den beiden Factoren x und w_x , d. i. dem Alter und der scheinlichenkeit der Erlebensdauer, herrscht die Bedingung, dass bei Zunahme ersteren das letztere abnimmt und umgekehrt; und zwar geschieht dies genau proportionaler Weise, sondern wächst in progressivem Sinne.

Wir können daher die bekannte allgemeine Form für dieses Princip anwendung bringen, welches sich in nachstehender Formel äussert

$$5) \quad y' - Ay'^2 - B = 0$$

worin A und B willkürliche Constanten bezeichnen und welche Form nach Substitution obiger Factoren in folgende übergeht

$$w_x' - A \left(\frac{dw_x}{dx} \right)^2 - B = 0$$

nach vollzogener Integration und gehöriger Substitution der Constanten erhalten die Resultatsgleichung

$$6) \quad w_x = a q^x + b q^{-x}$$

welche bekanntlich die Gleichung der Kettenlinie ist.

Das Minimum für w_x erhalten wir, wenn wir das Alter x in derselben setzen, wodurch sich folgende Relation ergibt

$$a q^{99} + b q^{-99} = 0$$

somit

$$\frac{b}{a} = -q^{198}$$

Durch Substitution zweier passenden Werthe in die Gleichung (6) erhalten sodann weitere zwei Gleichungen, aus denen sich in Verbindung mit der letzten Relation die Werthe für a , b und q ergeben, worauf wir noch später zurückzukehren gedenken.

Durch Ermittlung dieser Curve wird es uns nun möglich, nicht nur ein beliebiges Alter des Versicherten die wahrscheinliche Erlebensdauer zu ermitteln, sondern auch auf Grund derselben das Absterbegezet genauer zu fixiren, und auch die Anzahl der Lebenden in verschiedenen Stadien während der Jahresfrist festzustellen in der Lage sind.

liefert, deren Wurzeln

$$8) \quad \begin{cases} V_1 = + 1 \\ V_2 = - 1 \\ V_3 = \frac{1}{2} \left[\frac{(w_x)_1}{(w_x)_2} + \sqrt{\left[\frac{(w_x)_1}{(w_x)_2} \right]^2 - 4} \right] \\ V_4 = \frac{1}{2} \left[\frac{(w_x)_1}{(w_x)_2} - \sqrt{\left[\frac{(w_x)_1}{(w_x)_2} \right]^2 - 4} \right] \end{cases}$$

sind.

Da nun V_1 und V_2 für a und b unendliche Werthe liefern und als 1 ist, daher für unsere Rechnung unpraktisch, so erübrigt uns nur V_3 , welche nach Substitution der entsprechenden Werthe der Wahrsche Erlebensdauer

$$(w_x)_1 = 31.78526$$

und

$$(w_x)_2 = 9.95536$$

den Werth

$$V = 2.84016$$

liefert. In Folge dessen ergibt sich

$$\begin{aligned} q &= V^{\frac{1}{33}} = 1.0321443 \\ a &= - 0.1744906 \\ b &= + 91.7022 \end{aligned}$$

Da diese Curve jedoch bloß in den drei Punkten x_0 , x_1 und x_2 mit übereinstimmt, so wird, um derselben den nöthigen correctiven Spielraum folgende Form der Anforderung entsprechen:

$$9) \quad w_x = a (q + \delta)^x + b (q + \delta)^{-x}$$

worin δ in den oben bezeichneten drei Punkten $= 0$ werden muss. D nur dann der Fall sein kann, wenn die bekannte Kettenlinie mit der ge in diesen drei Punkten zum Schnitt kommt, so wird offenbar eine positiv wechselnde Interpolation stattfinden müssen.

Derselben wird nun dadurch entsprochen, dass für δ eine Form g welche für die Werthe x_0 , x_1 und x_2 verschwindet und zu gleicher Zeit mitteldifferenzen entsprechend regelt.

Dieser Anforderung entspricht nun folgende probeweise ermittelte

$$10) \quad \delta = \frac{x}{2(99+x)} \left(1 + \frac{x}{2(99+x)} \right) \left[\frac{(33-x)(66-x)(99-x)}{(33+x)(66+x)(99+x)} \right]$$

und wir erhalten somit die dem Absterbegesetz entsprechende Linie

$$11) \quad w_x = 91.7022 \left[1.0321443 + \frac{x}{2(x+99)} \left(1 + \frac{x}{2(x+99)} \right) \left(\frac{(33-x)(66-x)}{(33+x)(66+x)} \right) \right. \\ \left. - 0.1744906 \left[1.0321443 + \frac{x}{2(x+99)} \left(1 + \frac{x}{2(x+99)} \right) \left(\frac{(33-x)(66-x)}{(33+x)(66+x)} \right) \right] \right]$$

[Faint, mostly illegible text on the left side of the page, possibly bleed-through from the reverse side.]

... einen als
... von ver-
... gebenden,
... esonder-
... edet er.
... zeln
... kurz
... dieses
... zeln
... eine
... und
... rechtzeitig
... wickenden
... festzu-
... Wang de
... glauben
... vorzu-
... handelt.

... and finden.
... der letzteren
... chen Falle das
... nicht einer
... eine solche
... statuta-
... ein Mitglied
... Verein vor
... bestreiten, dass
... wenn zwei
... unterstützen. Es
... eines solchen

... festzustellen, unter
... Abrechnung, dass die
... Deckung derselben be-
... gelten.

... die Einlage eines Mitglieds
... Zinsen und Zinsezinsen nach
... entsprechenden Darlehen derselben repräsentieren?
... dieser Frage gilt im Falle d. d. Darlehens die Einlage

$$d = 100 \cdot p \cdot t$$

$p = 100 \cdot p$ den Prozentsatz, mit welchem die Einlage verzinst wird und n die Dauer bezeichnet

Dr. Ludwig Grossmann's

Schematische Anleitung zur Schätzung der Brandschaden-Reserven.

II.

gelang uns im ersten Theile dieser Abhandlung denjenigen Punkt theoretisch feststellen, bis zu welchem die Summe der positiven Gefahreffecte durch jene der negativen aufgehoben wird. Für Fabriken-Risico äussert sich nun diese Erscheinung in dem Punkte $s = 9.45$, welcher also daselbst die Grenze derjenigen Gefahräquivalenzsummen bezeichnet, bis zu welchen sich die denselben entsprechenden Summen der positiven und negativen Gefahreffecte gegenseitig ausgleichen. Alle jene Risiken, die sich innerhalb der Grenzen $s = 0$ und $s = 9.45$ bewegen (siehe Prämiensatz 38), werden also den Schadeneffect des Fabriken-Normalrisicos nicht übersteigen.

Was nun das Gebäude-Risico anbelangt, so wird ein analoges Vorgehen in dieser Richtung uns zum erwünschten Resultate führen. Durch Substitution der entsprechenden Factoren in die Formen 5) und 6) der vorigen Abhandlung erhalten wir den Werth:

Für Gebäuderisico ist bekanntlich die mit der Grundprämie correspondirende Momentenanzahl $n_0 = 2$, somit

$$F = \frac{1}{8} (s + 3) (s + 1) (\lg (s + 1) - \mu) + \frac{\mu}{16} (s + 1)^2 - \left(1 + \frac{s}{4}\right) \frac{s \lg 2}{2} + \frac{5\mu}{16}$$

wir für $F = 0$ die Werthe $s = 0$ und $s = 1.89$ erhalten, welcher letzterer hier diejenige Grenze bezeichnet, in welcher die Summen der positiven und negativen Gefahreffecte sich gegenseitig ausgleichen.

Nachdem wir nun diese Grenzen festgestellt haben, so erwächst uns die Frage, auf welcher Weise wird der Schadeneffect aus den gefundenen Resultaten zum Ausdrücken kommen können. Da für $s = 0$ der grösste negative und für $s = 9.45$ der grösste positive Gefahreffect innerhalb dieser Grenzen auftritt, so wird offenbar in der Summe dieser äussersten Gefahreffecte die Lösung der Aufgabe liegen müssen.

Es ist nämlich bei

Fabriken-Risico			Gebäude-Risico		
$s = 0$	$\epsilon_1 =$	0.25938	für $s_1 = 0$	$\epsilon_1 =$	0.15051
$s = 5$	$\epsilon_2 =$	0	$s_2 = 1$	$\epsilon_2 =$	0
$s = 9.45$	$\epsilon_3 =$	0.33333	$s_3 = 1.89$	$\epsilon_3 =$	0.15547

den äussersten Grenzen des normalen Risicos sind somit, wie aus obigen Zahlen zu sehen ist, ungleich weit von denjenigen Punkten entfernt, in welchen der Effect Null wird. Da jedoch die beiderseitigen Flächen gleich gross sind, so müssen auch die Intensitäten der Gefahreffecte auf derjenigen Seite grösser sein, woher diese Distanz eine kleinere ist. Nun kann aber eine grössere Anzahl Versicherungen mit kleinerem Gefahreffect nicht gleichbedeutend sein mit einer geringeren Anzahl Versicherungen von grösserem Gefahreffect, und es ist demgemäss

Nr.	s_k	Versiche- rungs-Summe 1000 . k	Prämie	Prämien- Betrag	$k s_k$
1	1.40	5000	2.819	14.10	7
2	2.10	8000	2.931	23.45	16.8
3	2.80	13000	3.052	39.68	36.4
4	3.50	15000	3.184	47.76	52.5
5	4.20	20000	3.326	66.52	84.0
6	4.55	10000	3.400	34.00	45.5
7	4.90	8000	3.477	27.82	39.2
8	5.25	10000	3.557	35.57	52.5
9	5.95	15000	3.722	55.83	89.3
10	6.30	20000	3.808	76.16	126.0
11	6.65	20000	3.895	77.90	133.0
12	7.00	18000	3.986	71.71	126.0
13	7.70	15000	4.171	62.56	115.5
14	8.05	6000	4.266	25.60	48.3
15	8.40	16000	4.364	69.82	134.4
16	8.75	12000	4.463	53.56	105.0
17	9.10	20000	4.564	91.28	182.0
18	9.20	15000	4.594	68.91	138.0
19	9.40	18000	4.652	83.74	169.0
		264000		1225.97	1700.56

demgemäss ist nach der Form 3) $m = \frac{1700.56}{5.264} = 1.28826$

Die Reserve für den Posten 14 ist demnach, da der Schadeneffect $S = R = 0.23335 \cdot 1.28826 \cdot 4.266 = 1.28\text{‰}$, oder 30% der Prämie, was für alle übrigen Posten des normalen Risicos für speziellen Fall gilt.

Anders verhält es sich jedoch bei nicht normalem Risiko. Nehmen wir an, es wäre $m' = 1.2$, also eine ziemlich verhältnissmässige Vertheilung der Versicherungssummen, *) so würde sich für ein Risiko, dem eine Prämie von 1 also ein Gefahreffect von $\epsilon_n = 0.75143$ entspricht, die Brandschaden-Reserve gendermassen ergeben:

$$R' = 0.233351 + \left(\frac{0.75143 - 0.33333}{0.75143} \right) \cdot 1.2 \cdot 6.13 = 2.67\text{‰}$$

oder 43.58% der Prämie. Zum Schlusse sei noch bemerkt, dass, je grössere Anzahl der Versicherungen ist, desto mehr wird das wirkliche Schaden-Ergebnis obiger Rechnung übereinstimmen.

*) Bei vollständig verhältnissmässiger Vertheilung sowohl der Risiken als auch der Versicherungsbeträge müssen m und m' gleich 1 werden.

Wenn eine solche Serie n Versicherungen in sich fasst und die in die Form 1) edrückte Vorbedingung erfüllt wird, so wird folgender Relation entsprochen en.

$$m = \frac{n A}{a + b + c . . . k}$$

ehungsweise

$$m' = \frac{n A s_2}{\eta (a + b + c . . . k)}$$

Ist daher auch

$$n A_1 = a + b + c + . . + k$$

ehungsweise

$$n A s_2 = \eta (a + b + c + . . + k)$$

ird m , respective m' gleich 1 werden. Den Anforderungen in dieser Beziehung a immerhin auch derart entsprochen werden, dass sich beide Bedingungen gegen- ig ergänzen.

Es sei zu besserem Verständniss in folgenden Tabellen je eine solche Serie zusammen- ellt, und zwar sowohl für normale als auch für nicht normale Risiken, worin diesen ingungen entsprochen wird.

Tabelle

r bei normalen Risiken zur directen Versicherung zulässigen mittleren Beträge.

Fabriken - Risiko			Gebäude - Risiko		
Gefahr- äquivalenten- Summe s $\eta = 3.5$	Prämie 0.00	$s_2 \cdot 100$ Versicherungs- summe in Prozenten von A	Gefahr- äquivalenten- summe s für $\eta = 1.5$	Prämie 0.00	$s_2 \cdot 100$ Versicherungs- summe in Prozenten von A
2.45	2.991	204.182	0.45	1.372	222.222
2.80	3.052	178.571	0.60	1.405	166.667
3.15	3.116	158.730	0.75	1.440	133.333
3.50	3.184	142.857	0.90	1.476	111.111
3.85	3.254	129.870	1.00*	1.500	100.000
4.20	3.326	119.047	1.05	1.512	95.238
4.55	3.400	109.880	1.20	1.550	83.333
4.90	3.477	102.041	1.35	1.588	74.074
5.00*	3.500	100.000	1.50	1.627	66.667
5.25	3.557	95.238	1.65	1.667	60.606
5.60	3.638	89.286	1.80	1.708	55.555
5.95	3.722	84.033	1.89**	1.731	52.906
6.30	3.808	79.365			
6.65	3.895	75.188			
7.00	3.986	71.428			
7.35	4.078	68.027			
7.70	4.171	64.935			
8.05	4.266	62.112			
8.40	4.364	59.524			
8.75	4.463	57.143			
9.10	4.564	54.945			
9.45**	4.667	52.906			

* Die der beziehungsweise Grundprämie entsprechende Gefahräquivalentensumme s_2 .
** Außerste Grenze für normales Risiko.

Tabelle

der bei nicht normalen Risiken zur directen Versicherung zulässigen middle

Fabriken-Risiko			Gebäude-Risiko		
Gefahr- äquivalenten- Summe s für $g = 3.5$	Prämie ‰	$\frac{s^2}{A} \cdot 100$ Versicherungs- summe in Prozenten von A	Gefahr- äquivalenten- Summe s für $g = 1.5$	Prämie ‰	Ver- sicherungs- summe
9.45*	4.667	52 906	1.89*	1.781	
9.80	4.771	51 020	1.95	1.750	
10.15	4.877	49.261	2.10	1.792	
10.50	4.983	47.619	2.25	1.836	
10.85	5.091	46.083	2.40	1.880	
11.20	5.202	44.643	2.55	1.925	
11.55	5.314	43.278	2.70	1.971	
11.90	5.426	42.017	2.85	2.017	
12.25	5.540	40.816	3.00	2.063	
12.60	5.656	39.682	3.15	2.112	
12.95	5.675	38.610	3.30	2.160	
13.30	5.895	37.594	3.45	2.213	
13.65	6.010	36.630	3.60	2.260	
14.00	6.130	35.714	3.75	2.310	
14.35	6.252	34.843	3.90	2.361	
14.70	6.375	34.014	4.05	2.413	
15.05	6.499	33.223	4.20	2.465	
15.40	6.624	32.467	4.35	2.517	
15.75	6.751	31.746	4.50	2.571	
16.10	6.879	31.056	4.65	2.625	
16.45	7.007	30.395	4.80	2.679	
16.80	7.136	29.726	4.95	2.734	
17.15	7.267	29.154	5.10	2.789	
17.50	7.399	28.571	5.25	2.845	
17.85	7.531	28.011	5.40	2.902	
18.20	7.664	27.472	5.55	2.959	
18.55	7.799	26.954	5.70	3.016	
18.90	7.935	26.455	5.85	3.074	
19.25	8.071	25.974	6.00	3.132	
19.60	8.208	25.510	6.15	3.191	
19.95	8.345	25.063	6.30	3.249	
20.30	8.482	24.630	6.45	3.308	
20.65	8.624	24.213	6.60	3.370	
21.00	8.766	23.810	6.75	3.430	
21.35	8.908	23.419	6.90	3.491	
21.70	9.050	23.041	7.05	3.552	
22.05	9.193	22.676	7.20	3.613	
22.40	9.338	22.321	7.35	3.674	
22.75	9.483	21.978	7.50	3.737	
23.10	9.629	21.645	7.65	3.801	
23.45	9.775	21.322	7.80	3.865	
23.80	9.923	21.008	7.95	3.929	
24.15	10.071	20.704	8.10	3.993	
24.50	10.220	20.418	8.25	4.056	
u. s. f.			u. s. f.		

* Grenzscheide zwischen normalem und nicht normalen Risiko. -- Im Fall $A = 10.000$ Gulden wäre, so würde der höchst zulässige mittlere Betrag für ein Risiko fl. 5.290.60 repräsentiren.

Der Form 4) gemäss ist

$$C = 100 \frac{P \frac{u^n (v^n - 1)}{Q \frac{v^n (u^n - 1)}{C}}}{Q \frac{v^n (u^n - 1)}{C}},$$

mit

$$\frac{Q \frac{v^n (u^n - 1)}{C}}{100 \frac{v^n (u^n - 1)}{C}} = \frac{P \frac{u^n (v^n - 1)}{Q \frac{v^n (u^n - 1)}{C}}}{C \frac{v^n (u^n - 1)}{C}}$$

da hierin $r = 1 + \frac{Q}{100}$, so erhalten wir:

$$\frac{v^n (v - 1)}{v^n - 1} = \frac{P}{C} \frac{u^n}{u^n - 1}.$$

Hieraus ergibt sich nun

$$v = \frac{P}{C} \frac{u^n}{u^n - 1} \left(1 - \frac{1}{r^n}\right) + 1$$

und somit, wenn wir dies beiderseits zur n ten Potenz erheben, füglich

$$v^n = \left[1 + \frac{P}{C} \frac{u^n}{u^n - 1} \left(1 - \frac{1}{r^n}\right)\right]^n$$

hieraus erhalten wir nach der bekannten Lösung der transcendenten Formen die einzige kontinuierliche Ersatzgleichung:

$$v^n = \sum_{m=1}^{\infty} \frac{E}{m} \frac{u^n}{u^n - 1} \left[1 + \frac{P}{C} \frac{u^n}{u^n - 1} \left(1 - \frac{1}{m}\right)\right]^n$$

als Resultat. Wir wollen zum besseren Verständniss ein Beispiel durchführen. Eine Bank würde die Begebung eines beliebig grossen Anlehens, welches durch den Staat contrahirt wird, mit einem Course von 92 übernehmen; die Tilgung desselben wäre auf 30 Jahre projectirt und soll das Anlehen in vierpercentiger Papier-Rente begeben werden. Wie hoch würde sich die eigentliche Verzinsung mit Bezug auf den Uebernahmescours belaufen?

Der Staat würde also für je fl. 100 emittirter Rente bloss den Betrag von fl. 92 erhalten, hätte jedoch fl. 100 zu tilgen und müsste überdies fl. 92 mit 4 Gulden pro anno verzinsen. Diesem Beispiele gemäss, wäre daher $C = 92$, $u = 30$, $P = 100$, $p = 4\%$, $r = 1.04$, und $Q = 100$, $q = ?$ Es ergäbe sich daher die entsprechende Form:

$$r^{30} = \sum_{m=1}^{\infty} \frac{E}{m} \frac{u^n}{u^n - 1} \left[1 + \frac{4 (1.04)^{30}}{92 [(1.04)^{30} - 1]} \left(1 - \frac{1}{m}\right)\right]^{30} = 3.9687,$$

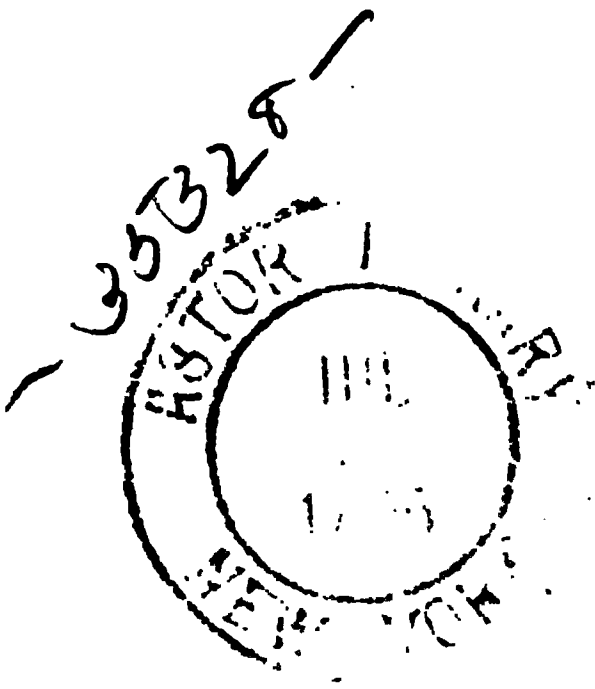
somit $r = 1.04702$ und $Q = 4.702\%$.

Das dem Staate in Wirklichkeit zur Verfügung gestellte Capital K' würde also bei dem Umstande, als bloss dessen alleinige Tilgung innerhalb 30 Jahren bedingt wäre, also die Schuld des Staates den Werth K' nicht überschreiten würde, unter diesen Auspicien eine 4.7percentige Verzinsung erheischen: da jedoch der Staat mehr schuldig ist, als er empfangen hat, indem er den Nominalwerth K innerhalb 30 Jahren zu tilgen hat, so repräsentirt diese Verpflichtung im Vergleiche zu der eigentlichen 4percentigen Verzinsung des Nominalwerthes K eine 0.7percentige Mehrverzinsung des empfangenen Capitaless K' .

Es müssen somit die jährlichen Annuitäten, welche nothwendig sind, u Nominalwerth des Darlehens K innerhalb 30 Jahren bei 4percentiger Verzinsung tilgen gleich sein denjenigen, welche innerhalb derselben Dauer das an den wirklich geliehene Capital K' bei einer 4.7percentigen Verzinsung, zu tilg Stande sind.

Nachdem nun das Geschäft in diesem Sinne abgeschlossen wurde, wird die betreffende operirende Bank die ihr vom Staate zur Verfügung gestellten Rententitres an das anlagebedürftige Publicum zu begeben trachten, und zwar so hoch als möglich über den Uebernahmescours, denn die Differenz zwischen diesem und dem Durchschnittscours, mit welchem die Rente an den Mann gebracht wird, ist der eigentliche Gewinn, welchen die Bank aus dem Geschäfte erzielt. Wäre z. B. die Bank im Stande sämmtliche Rententitres mit dem Nominalwerthe anzubringen, würde sie die ganze Differenz zwischen K und K' in's Verdienen bringen. Ist jedoch im Allgemeinen nie der Fall ist, sondern immer ein Theil dieses Nominalwerthes abgegeben werden muss, so ist beim Abschlusse solcher Finanzgeschäfte die Nothwendigkeit vorhanden, mit den Bedürfnissen des Geldmarktes zu rechnen. In solchen Zeiten, wo der Cours der Staatsrenten ein entsprechend hoher ist, können solche Geschäfte ohne Gefahr durchgeführt werden, insbesondere wenn hier der Zeitpunkt gewählt wird, wo die flüssigwerdenden Zinsen der grossen Anlagecapitalien das Bedürfniss nach neuen Anlagen steigern.

In allen Fällen muss jedoch der Financier in der Feststellung des Uebernahmescourses die nöthige Vorsicht anwenden, um bei Durchführung solcher Geschäfte seine Rechnung zu finden.



$$z = z_0 > 4.8 \left[1 + \frac{1 - \frac{1}{z_0}}{17.2918} \right]^{40}$$

als die für diesen speciellen Fall giltige Ersatzgleichung, welcher das Resu

$$z = v^{40} = 6.8888$$

entspricht, woraus der Werth für v resultirt

$$v = 1.04944$$

welcher einen Zinsfuss von 4.94% bei vierzigjähriger Tilgungsfrist als Parität dem Anbot B ergibt.

Da nun A bei vierzigjähriger Tilgung bloß eine Verzinsung von 4.8% beansprucht, so ist dessen Anbot der günstigere.

Wie wir nach diesen beiden Beispielen ersehen haben, nimmt bei unveränderter Tilgungsfrist der Zinsfuss mit dem Uebernahmskurs zu; und bei unverändertem Uebernahmskurs der Zinsfuss mit der Tilgungsfrist. Da nun ferner bei zunehmender Tilgungsfrist bekanntlich der Uebernahmskurs im Abnehmen oder der Zins im Zunehmen begriffen ist, so geht daraus hervor, dass bei gleichzeitiger Zunahme des Uebernahmskurses und der Tilgungsfrist der Zinsfuss einem doppelten Wechsel unterworfen sein wird.

Folgendes Beispiel mag dies illustriren. A macht den Anbot bei einem Uebernahmskurs von 96 und 5%iger Verzinsung eine Tilgungsfrist von vierzig Jahren zu gewähren. B dagegen offerirt bei einem Uebernahmskurs von 94 und einer 4%igen Verzinsung bloß eine dreissigjährige Tilgungsfrist; welcher der beiden Angebote ist der günstigere?

Die Formen 4), 5) und 6) liefern uns für diesen Fall die nöthige Ersatzgleichung; es ist nämlich analog zu obigem Beispiel

$$7) \quad z = v^n = \sum_{z_0 > u^n}^{u > m} \left[1 + \frac{C}{C'} \cdot \frac{u^m (u - 1)}{u^m - 1} \left(1 - \frac{1}{z_0} \right) \right]^n$$

worin jedoch die Uebernahmskurse C' mit u und C mit v correspondiren, $C' = 94$ und $C = 96$ ist.

Wir erhalten somit für unser Beispiel

$$z = v^{40} = \sum_{z_0 > 4.8} \left[1 + \frac{96}{94} \cdot \frac{1 - \frac{1}{z_0}}{17.2918} \right]^{40}$$

und nach durchgeführter Rechnung

$$z = v^{40} = 7.2577$$

und schliesslich

$$v = 1.0509$$

was einer Verzinsung von 5.09% entspricht, wenn die Parität mit dem Anbot B hergestellt sein soll. Da nun A bloß 5% beansprucht, so ist dessen Anbot der günstigere.

Um diese Frage zu beantworten, benützen wir die in unserer diesbezüglich Abhandlung unter dem Titel: „Berechnung von Prämientarifen einiger Assecurationen“ (I. Lief.) enthaltenen Formen; und zwar ist daselbst N die Nettoprämie, n die zurückgelegte Dauer der Einzahlung, $M = 100 m$, das den Gewinnantheil repräsentirende Percent der Nettoprämie, G der Gesamtwert der Gewinnantheile sammt Zinsen und Zinseszinsen nach einer Anzahl von Jahren und k das Verhältniss des zu diesem Behufe nöthigen Prämienzuschlages zur Nettoprämie.

Die Form

$$1) \quad G = m N \left(\frac{1 + p}{p} \cdot \frac{(1 + p)^n - 1}{p} - \frac{n}{p} \right)$$

wird der obigen Frage entsprechen, wenn $n = 8$ und $G = 2 N$ gesetzt wird. Daraus gemäss ergibt sich

$$2) \quad m = \frac{2 p^2}{(1 + p) [(1 + p)^8 - 1] - 8 p}$$

als Gewinnantheil in Hundertstel Percenten der Nettoprämie.

Soll nun der nöthige Prämienzuschlag für diesen Fall ermittelt werden, liefert die Form

$$3) \quad k = m \left(\frac{1}{p} - \frac{n}{(1 + p) [(1 + p)^n - 1]} \right)$$

hiefür die nöthige Handhabe, so dass wir nach vollzogener Substitution, die Gleichung

$$4) \quad k = \frac{2 p}{(1 + p) [(1 + p)^8 - 1]}$$

erhalten, welche bei Annahme des entsprechenden Zinsfusses die nöthigen Abschüsse bietet.

Es sei z. B. die Verzinsung der Gewinnantheile mit $P = 100 p = 3.5$ Percent präliminirt, so erhalten wir die Werthe

$$m = 0.05116$$

d. i. etwas mehr als 5 Percent; somit beträgt unter diesen Voraussetzungen der Gewinnantheil fünf Percent des Nettowerthes der jeweilig bezahlten Prämien.

Der unter diesen Umständen erforderliche Jahresprämien-Zuschlag wird in Form 4) gemäss, da

$$k = 0.2135$$

ist, 21.35 Percent der Nettoprämie betragen, mit dessen Hilfe man nach 4jähriger Bestandesdauer der Versicherung mehr als 50 Percent, nach 5jähriger etwa 80 Percent, nach 6jähriger schon nahezu 110 Percent u. s. w. der jährlichen Nettoprämie als Specialreserve anzusammeln in der Lage ist. Nach Ablauf von 8 Jahren bereits ein Freijahr möglich und verbleibt nach Abzug des einjährigen Verwaltungskostenzuschlages noch immer etwa 70 Percent der Nettoprämie als weitere Specialreserve, welche, ohne in Anspruch genommen zu werden, bei fernerer Einzahlung der gleichen Prämien bereits nach weiteren fünf Jahren ein zweites Freijahr zulässt.

die vollständige Spiritusmenge Q aus einzelnen entzogenen Quantitäten folgend massen gestalten:

$$Q = \frac{Q_1}{n_1} + \frac{Q_2}{n_2} + \frac{Q_3}{n_3} + \dots + \frac{Q_n}{n_n} \quad (1)$$

um also in einem oder mehreren eine gleiche Menge Spiritus zu erzielen, müsst dieselben aus $n_1, n_2, n_3, \dots, n_n$ gleicher Teile bestehen:

$$n_1 = \frac{Q_1}{Q}, \quad n_2 = \frac{Q_2}{Q}, \quad n_3 = \frac{Q_3}{Q}, \quad \dots, \quad n_n = \frac{Q_n}{Q} \quad (2)$$

Ist nun der Export der Antheilhaftigkeit getragene Process vollzieht sich in demselben Masse, so ist das Volkvermögen, beziehungsweise beim Volkserwerb jährlich ein bestimmter Theil desselben durch das Ausland absorbiert wird. Hiedurch im Allgemeinen das relative Volkvermögen wird bei gleichbleibenden Budgeterfordernissen in einem Masse höher belastet, als es kleiner geworden ist, kann somit die Reihe der relativen Belastungscoefficientenreihe: $\frac{r}{r-u}$ der steigenden relativen Belastung ausgedrückt werden, wenn r das Volkvermögen und u den jährlich absorbierten Theil desselben darstellt. Man erhält somit in

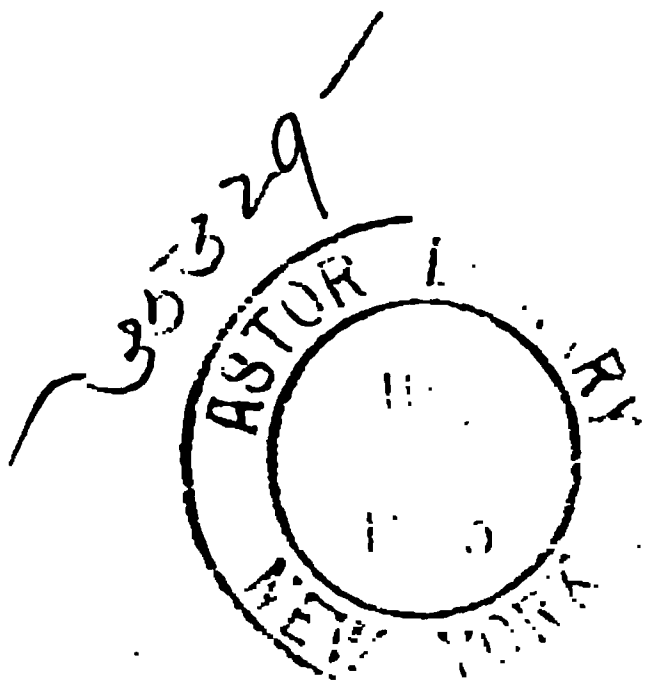
$$2) \quad \frac{r}{r-u}, \quad \left(\frac{r}{r-u}\right)^2, \quad \left(\frac{r}{r-u}\right)^3, \quad \dots, \quad \left(\frac{r}{r-u}\right)^{n-1}$$

die Reihe der steigenden relativen Belastungscoefficienten für denjenigen Fall, die jährlich absorbierten Beträge sich fortwährend gleich bleiben sollten. Für Annahme ihrer Veränderlichkeit müssten die oben angeführten allgemeinen Formeln zur Geltung gelangen.

Wir wollen uns jedoch damit begnügen, dieselben als gleich gross anzunehmen, da es sich hier nur um das erklärende und nicht um das statistische Moment dieser Frage handeln kann, und wollen auf dieser Grundlage die weiteren Consequenzen hieraus ziehen. Es fragt sich nämlich, ob jenes Reservoir, aus welchem die Beträge absorbiert werden, durch das Volkvermögen oder durch den Volkserwerb richtiger ausgedrückt wird; insbesondere als sowohl die directen wie auch indirecten Steuern nicht vom Volkvermögen, sondern vom Volkserwerb gefordert werden, wenn man Zinsengenuss ebenfalls als Volkserwerb betrachtet.

Obzwar also indirect das Volkvermögen in Mitleidenschaft gezogen werden dürfte, so ist es in erster Linie doch der Volkserwerb, welcher immer stärker die Inanspruchnahme seiner fördernden Mittel geschwächt wird; und wenn man bedenkt, dass die staatlichen Budgeterfordernisse in Folge ausserordentlicher Bedürfnisse der hiedurch gesteigerten Zinsenlast immer grösser werden, also nebst der relativen auch eine absolute Steigerung des Belastungscoefficienten eintritt, so kann man sich ein klares Bild von der Zunahme der Kräfteanspannung des Volkes machen.

In einem Staate, in welchem der Export den Import um ein Entsprechendes übersteigt, können Befürchtungen dieser Art nicht in Betracht kommen, da diesem Wege wieder das entzogene Capital einen Ersatz findet. Dert aber, wo solcher Kräftezufluss in unzureichendem Masse oder gar nicht vorhanden ist, müssen die oben angedeuteten Consequenzen vollends zur Geltung gelangen.



somit nach vollzogener Zusammenziehung der Formen 2) und 3) der Ausdruck

$$4) \quad w_x = \frac{L_{x+1}}{L_x} \cdot (1 + w_{x+1})$$

Giltigkeit erlangt. Diese Formen entsprechen offenbar, ebenso wie ihre Bezeichnung Jahresintervallen, weshalb zum Zwecke der Continuität derselben, d. h. zur Einführung unendlich kurzer Intervalle anstatt L_{x+1} , L_{x+2} ... die Bezeichnung $L_x + \Delta x$, $L_x + 2\Delta x$... eingeführt werden müssen.

Die Form 1) übergeht sodann mit Rücksicht auf das Intervall Δx in den Ausdruck

$$5) \quad w_x = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{L_x + n\Delta x}{L_x} \cdot \Delta x$$

somit gleichbedeutend mit

6)

$$w_x = \Delta x \left(\frac{L_x + \Delta x}{L_x} + \frac{L_x + 2\Delta x}{L_x} + \frac{L_x + 3\Delta x}{L_x} \dots \right) = \Delta x \cdot \frac{L_x + \Delta x}{L_x} + \left(1 + \frac{L_x + 2\Delta x}{L_x + \Delta x} + \frac{L_x + 3\Delta x}{L_x + 2\Delta x} \dots \right)$$

und man erhält demgemäss auch

$$7) \quad w_x + \Delta x = \Delta x \left(\frac{L_x + 2\Delta x}{L_x + \Delta x} + \frac{L_x + 3\Delta x}{L_x + \Delta x} + \frac{L_x + 4\Delta x}{L_x + \Delta x} \dots \right)$$

woraus schliesslich analog zu Obigem der Ausdruck

$$8) \quad w_x = \frac{L_x + \Delta x}{L_x} (\Delta x + w_x + \Delta x)$$

resultirt, welcher nach durchgeführter Rechnung der Form

$$9) \quad w_x \cdot L_x - L_x + \Delta x \cdot w_x + \Delta x = L_x + \Delta x \cdot \Delta x$$

entspricht. Lässt man nun hierin Δx gegen 0 verschwinden, so ergibt sich

$$w_x \cdot L_x - (L_x + dL_x) (w_x + dw_x) = L_x \cdot dx + dL_x \cdot dx$$

und da $dL_x \cdot dx$ ob seiner Kleinheit verschwindet, liefert dies nach durchgeführter Rechnung den Ausdruck

$$10) \quad w_x \cdot \frac{dL_x}{dx} + L_x \cdot \frac{dw_x}{dx} + L_x = 0$$

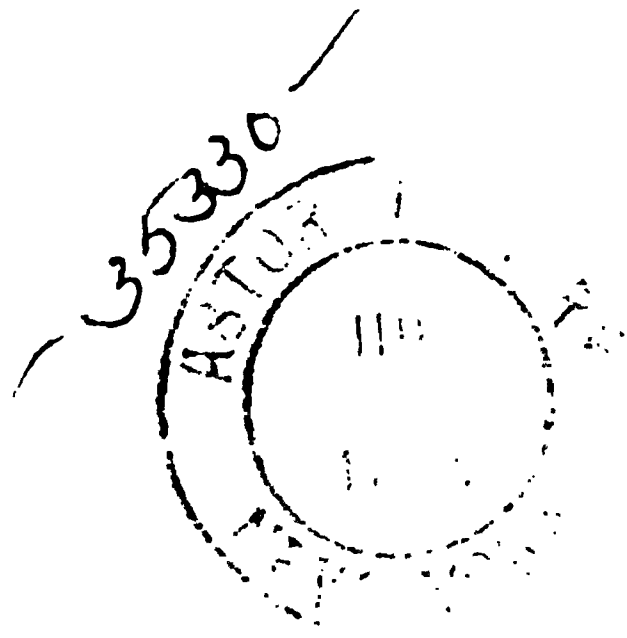
respective

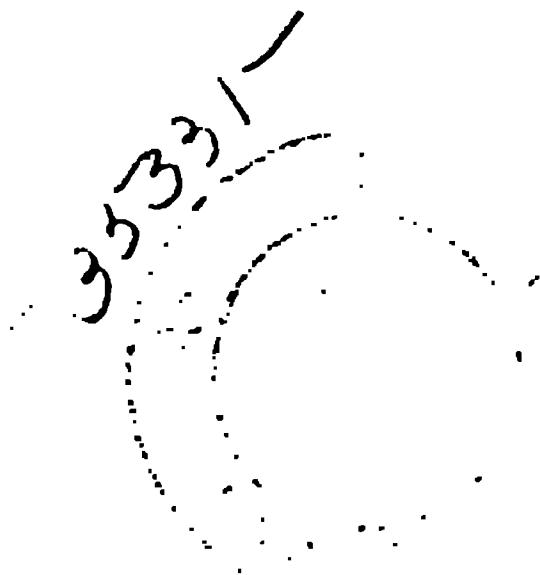
$$11) \quad \frac{dL_x}{dx} + \frac{dw_x}{dx} = -\frac{1}{w_x}$$

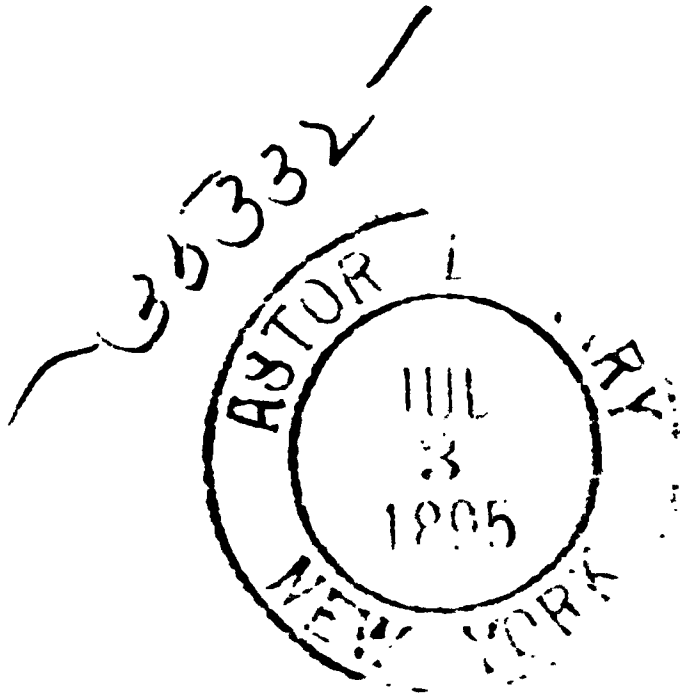
woraus sich die Relation zwischen den Lebenden L_x und der beziehungsweise scheinlichen ferneren Lebensdauer w_x in der Form

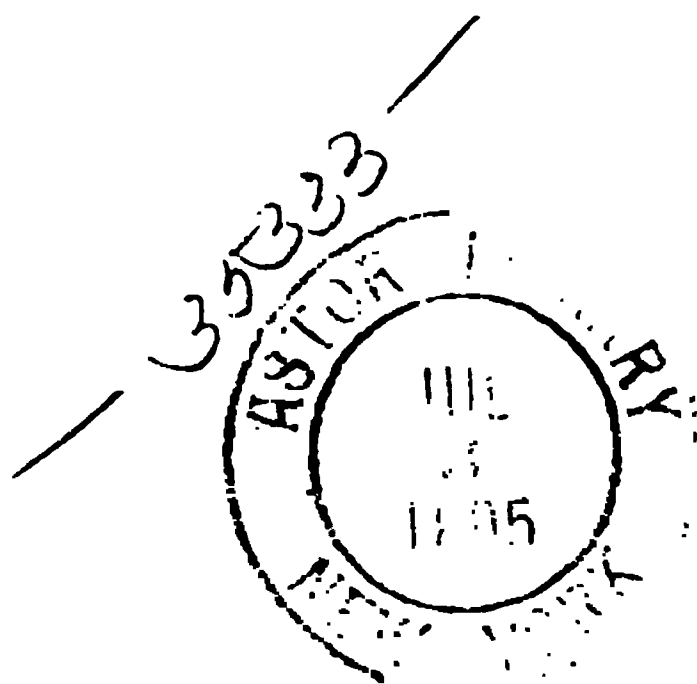
$$12) \quad L_x = e^{-\int \frac{dx}{w_x}}$$

ergibt, bei welcher das Alter x als vermittelnde Veränderliche fungirt









Der Werth G_g wird daher auch durch die Differenz $G_1 - G_2$ zum Ausdruck gelangen, welche nach durchgeführter Substitution thatsächlich mit dem Ausdrucke 10 identisch wird. Unter Hinzuziehung der Formel 11 gelangt endlich auch zu dem in Form 12 dargestellten Ausdrucke.

Die Form 12 entspricht also der Beantwortung folgender Frage: hoch ist der percentuelle Prämienzuschlag k für eine Versicherung, für welche die Zahlung von g Jahresprämien vorgesehen ist zum Zwecke eines M^0 während n Jahren jährlich steigenden und von da ab in den weiteren Jahren gleichmässig verlaufenden jährlichen Gewinnantheiles, welcher nach Ablauf des ersten Jahres der Versicherung flüssig zu werden beginnt, und so, dass derselbe nach dem ersten Jahre $M^0/100$, nach dem zweiten $2 \cdot M^0/100$, dem dritten $3 \cdot M^0/100$ beträgt, bis er die Höhe von $n \cdot M^0/100$ erreicht, um von da ab in diesem Ausmasse gleichmässig bis zur letzten Prämienzahlung zu laufen.

In nachfolgenden Zahlen mögen die Resultate dieser Aufgabe in wichtigsten Specialfällen zur Anschauung gebracht werden. Bei Zugrundelegung eines Zinsfusses von 4 Percent ergeben sich für den percentuellen Prämienzuschlag k unter nachstehenden Suppositionen betreffs der Gedauer der Prämienzahlung g und der Dauer der Gewinnantheil-Steigerung folgende Werthe:

für $g = 15$ und $n = 8$ wird	$k = 5.151 .m$
$g = 20$ „ $n = 10$ „	$k = 6.533 .m$
$g = 25$ „ $n = 10$ „	$k = 6.977 .m$
$g = 25$ „ $n = 15$ „	$k = 8.736 .m$

Demgemäss erhält man unter Voraussetzung eines 2%igen temporär steigenden Gewinnantheiles, d. i. für $M = 100 .m$ 2. als percentuellen Zuschlag Prämie

für $g = 15$ und $n = 8$	$k = 10.302\%$	} der Jahres Prämie bei 4%igem Zinsfusse.
$g = 20$ „ $n = 10$	$k = 13.066\%$	
$g = 25$ „ $n = 10$	$k = 13.954\%$	
$g = 25$ „ $n = 15$	$k = 17.472\%$	

hingegen unter Voraussetzung eines 3%igen temporär steigenden Gewinnantheiles, d. i. für $M = 100 .m$ 3, die Werthe:

für $g = 15$ und $n = 8$	$k = 15.453\%$	} der Jahres Prämie bei 4%igem Zinsfusse.
$g = 20$ „ $n = 10$	$k = 19.599\%$	
$g = 25$ „ $n = 10$	$k = 20.931\%$	
$g = 25$ „ $n = 15$	$k = 26.208\%$	

Unter Zugrundelegung eines $3\frac{1}{2}\%$ igen Zinsfusses gestalten sich die Resultate in folgender Weise:

für $g = 15$ und $n = 8$ wird	$k = 5.207 .m$
$g = 20$ „ $n = 10$ „	$k = 6.616 .m$
$g = 25$ „ $n = 10$ „	$k = 7.082 .m$
$g = 25$ „ $n = 15$ „	$k = 8.963 .m$

Demnach erhält man unter Voraussetzung eines 2%igen temporär steigenden Gewinnantheiles, d. i. für $M = 100 .m$ 2 als percentuellen Zuschlag Prämie:

